MATEMATICKÉ METODY V NĚKTERÝCH RANKINGOVÝCH MODELECH

LUBOMÍR PAŽOUREK

Abstrakt. Tento článek, napsán na základě stejnojmenné bakalářské práce autora, se zabývá matematickou podstatou některých rankingových metod. Jejich jednotícím prvkem je tzv. Perronova-Frobeniova věta pro nezáporné a ireducibilní matice, která formuluje podmínky pro existenci kladného vlastního čísla a kladného vlastního vektoru dané matice. Cílem článku je uvést přehled potřebných teoretických výsledků, vysvětlit jejich aplikaci v rámci některých rankingových metod a provést simulace při vyhodnocení některých soutěží. Následně porovnat uvedené metody s některými, které se často používají v šachových turnajích.

1. Úvod

Už od pradávna lidé mezi sebou navzájem soupeřili a snažili se být těmi nejlepšími. Pro respektování dosažených výsledků a jednotlivých umístění v co největší míře musela být nastavena pravidla, podle kterých se různé věci bodovaly a podle kterých se určovalo průběžné i závěrečné pořadí. Ať už to bylo ve sportovních soutěžích týmů, které budeme rozebírat právě my, nebo v libovolných jiných, kde je cílem sestavit nějaký žebříček podle výkonnosti či úspěšnosti.

Otázka rankingu – tedy sestavení pořadí na základě vybraných faktorů – je někdy velmi jednoduchá, někdy zase velmi obtížná. Existují například atletické disciplíny, ve kterých rozhoduje o pořadí pouze výkonnost. Ve skoku vysokém pořadí atleta či atletky určuje nejvyšší zdolaná výška, v běhu na 1000 metrů pouze čas. Klasifikace je z tohoto hlediska objektivní a nezavdává příčinu k případným stížnostem.

V případě hodnocení týmových soutěží, především fotbalu a hokeje v Česku nebo Evropě, o pořadí rozhoduje celkový bodový zisk, který je určen na základě výsledků jednotlivých zápasů a předem stanovených kritérií. V české fotbalové lize se každý tým s ostatními celky potká dvakrát, v české extralize ledního hokeje

---

2020 *MSC.* Primární 15A18.

Klíčová slova. hodnotící, turnajová a ireducibilní matice, vlastní číslo, vlastní vektor, Perronova-Frobeniova věta, rankingové metody.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucí práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

Velmi bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za velmi vstřícný přístup, veškerou pomoc, cenné rady a připomínky při psaní závěrečné práce i tohoto článku.

každý s každým čtyřikrát. Týmy se mezi sebou potkávají tedy stejnou měrou, takže v tomto ohledu nemůže nikdo namítat, že konečné pořadí není spravedlivé.

Existují ale i soutěže, ve kterých týmy mezi sebou nehrají stejný počet zápasů, nebo se dokonce některé nestřetnou vůbec. Poté pořadí sestavené na konci celého ročníku pouhým sečtením bodů může vyvolat velkou nevoli mezi příznivci jednotlivých týmů, protože se mohou domnívat, že zrovna jejich tým měl těžší los a díky tomu skončil v pořadí níže než měl, a než fanoušci doufali.

Pokusíme se tedy najít takové rankingové systémy, které nebudou zohledňovat jen bodové zisky z utkání, ale i kvalitu jednotlivých protivníků. V tomto článku se zaměříme zejména na ty, které využívají různých, zajímavých matematických metod a teoretických výsledků z lineární algebry. Následně se pokusíme zhodnotit, jestli by bylo lepší používat k sestavování pořadí právě tyto rankingové systémy, v čem by byly jejich benefity, a v čem naopak případná úskalí.

Článek je rozčleněn do sedmi kapitol. V druhé kapitole zavedeme a okomentujeme důležité související matematické pojmy. V třetí kapitole se detailněji podíváme na znění Perronovy-Frobeniovy věty, která je matematickým základem některých významných rankingových metod. Ve čtvrté kapitole ukážeme, jak reprezentovat tabulky s body z jednotlivých utkání maticovým zápisem, a tyto speciální matice a některé jejich vlastnosti podrobněji prozkoumáme. Následně uvedeme využití kladných vlastních vektorů garantových Perronovou-Frobeniovou větou v uvažovaných rankingových systémech. Prozkoumáme také různé varianty bodových ohodnocení zápasů. V další kapitole si budeme ilustrovat použití navržených rankingových systémů na třech příkladech z reálného světa sportu, konkrétně na fotbalové Premier League, hokejové NHL a lize amerického fotbalu NFL. A v předposlední kapitole si námi popisované metody porovnáme s metodami, které jsou používané v šachových turnajích.

2. Přehled matematického aparátu

Nejprve si připomeneme některé základní pojmy teorie matic spolu se základními komentáři. S těmito pojmy další část tohoto textu pracuje. Při zavedení těchto pojmů budeme předpokládat, že A je čtvercová matice řádu n (tuto skutečnost nebudeme opakovat).

2.1. Vlastní čísla a vlastní vektory

Začneme s pojmem vlastní číslo a vlastní vektor, které v tomto článku hrají velmi významnou roli.

Definice 2.1. Nechť I je jednotková matice řádu n. Pak algebraickou rovnici

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

s neznámou λ nazýváme *charakteristickou rovnicí* matice A. Kořeny této charakteristické rovnice pak nazveme *vlastní čísla* matice A. Je-li λ vlastní číslo A, pak existuje nenulové řešení $\boldsymbol{r}$ soustavy

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0},$$

které nazveme *vlastním vektorem* matice A příslušný vlastnímu číslu λ.

Problematika vlastních čísel a vlastních vektorů dané matice je v literatuře zkoumána z mnoha různých pohledů. Nás bude zajímat především rozložení vlastních čísel podle jejich velikostí.

Definice 2.2. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Vlastní číslo λ_1 nazveme *dominantním vlastním číslem*, jestliže platí

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad \text{pro všechna } i = 2, \ldots, n.$$

Dominantní vlastní číslo tedy udává tzv. *spektrální poloměr* matice A, který určuje poloměr uzavřeného kruhu v komplexní rovině (se středem v počátku), ve kterém leží všechna vlastní čísla matice A.

Problém nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů matice A patří do oblasti numerické matematiky (tyto hodnoty jsme schopni analyticky určit pouze pro matice nízkých řádů). Metody, které jsou přitom využívány, se odlišují různými hledisky. Jedním z nich je, zda hledáme všechna vlastní čísla, nebo jen některá vybraná (například dominantní). V následující kapitole připomeneme princip metody, která umožní nalézt (za jistých předpokladů) dominantní vlastní číslo dané matice, a jemu odpovídající vlastní vektor. Jak uvidíme, tento vektor může mít, při splnění určitých požadavků, významné postavení při užití některých rankingových metod.

V další části připomeneme některé speciální typy čtvercových matic.

2.2. Některé typy matic

Definice 2.3. Čtvercová matice P řádu n se nazývá permutační matice, je-li možno P získat z jednotkové matice I stejného typu postupnou výměnou řádků.

Permutační matice mají řadu užitečných vlastností, z nichž připomeneme následující:

- Výměnu řádků (resp. sloupců) dané matice A můžeme reprezentovat pomocí součinu PA (resp. AP).
- Pro každou permutační matici P platí $P^{-1} = P^T$.

Příklad 2.4. Uvažujme obecnou matici čtvrtého řádu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

ve které bychom chtěli zaměnit druhý řádek se třetím. Proveďme tuto operaci pomocí permutační matice. Zvolíme si tedy jednotkovou matici, zaměníme v ní stejné řádky, které chceme zaměnit v matici A, a vzniklou matici označíme P.

Poté touto maticí vynásobíme matici A zleva:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad PA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Došlo tedy skutečně k požadované záměně řádků. Ukažme si, že naopak při vynásobení matice A zprava touto permutační maticí P, se namísto řádků prohodí sloupce:

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Definice 2.5. Matice A je tzv. *horní trojúhelníková matice*, právě když platí

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro všechna } i > j.$$

Pokud je navíc nulová i hlavní diagonála, jedná se o tzv. *ryze horní trojúhelníkovou matici.*

Na závěr zavedeme speciální typ matice, která je v jistém smyslu nerozložitelná.

Definice 2.6. Matice A se nazývá *ireducibilní*, pokud je řádu jedna, nebo neexistuje žádná permutační matice P taková, že PAP^T je v tzv. blokově horním trojúhelníkovém tvaru, tj.

$$P^T AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

kde A_{11} (resp. A_{22}) je čtvercový blok řádu k (resp. $n - k$). Matice A_{12} je pak rozměru $k \times (n - k)$.

Poznamenejme, že ireducibilita znamená, že žádným prohozením řádků a sloupců v dané matici nedostaneme výše popsaný blokově horní trojúhelníkový tvar. Dodejme ještě, že podmínku, aby matice A byla ireducibilní, můžeme formulovat ekvivalentně i v jiném tvaru (viz např. [3] a [4]).

3. Perronova-Frobeniova věta

Základní tvrzení obsažená v této kapitole byla čerpána z knih [3] a [4]. Tato tvrzení se týkají speciálních spektrálních vlastností matic. Později uvidíme, že v některých rankingových metodách hraje důležitou roli kladný vlastní vektor dané čtvercové matice A (tímto termínem rozumíme vektor pouze s kladnými souřadnicemi). Cílem této kapitoly je proto zformulovat podmínky kladené na matici A, které existenci takového vektoru zaručí.

Začněme nejprve následující početní úvahou. Vezměme pro jednoduchost matici druhého řádu a položme si otázku, za jakých podmínek, kladených na koeficienty této matice, existuje dominantní kladné vlastní číslo této matice takové, že odpovídající vlastní vektor má kladné souřadnice.

Příklad 3.1. Uvažujme obecnou matici druhého řádu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

s charakteristickou rovnicí

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Vlastní čísla matice A tedy vypočítáme takto:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

Požadujeme, aby λ_1 bylo dominantní, kladné, reálné vlastní číslo. Pokud má být vlastní číslo reálné, diskriminant musí být nezáporný. Aby bylo navíc dominantní, musí být jednoduché. Diskriminant musí být tudíž kladný. Máme tedy

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} > 0,$$

tj.

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0.$$

Uvedená nerovnost je zaručená mj. tehdy, je-li $a_{12}a_{21} > 0$.

Dominantní vlastní číslo má být navíc kladné, což je zaručeno tehdy, je-li $a_{11} + a_{22} > 0$.

Shrnutím dvou odvozených nerovností dostáváme, že volíme-li koeficienty dané matice jako kladná čísla, pak existuje vlastní číslo s požadovanými vlastnostmi.

Podívejme se, jak při podmínce na kladnost koeficientů bude vypadat vlastní vektor $\boldsymbol{r_1}$ příslušný dominantnímu vlastnímu číslu λ_1.

Vlastní vektor $\boldsymbol{r_1}$ dostaneme jako řešení této soustavy rovnic:

$$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{r_1} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde r_{11} a r_{12} jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{r_1}$.

Protože jsou tyto rovnice lineárně závislé, lze je zjednodušit na tvar

$$(\lambda_1 - a_{11})r_{11} = a_{12}r_{12}.$$

Podle předpokladu jsou všechny koeficienty matice A kladné, proto, aby i souřadnice vlastního vektoru příslušného dominantního vlastního čísla byly kladné, musí platit $\lambda_1 > a_{11}$. Ekvivalentně vyjádřeno

$$\frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} > a_{11},$$

tj.

$$\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} > a_{11} - a_{22}.$$

Obě strany poslední nerovnosti umocníme a dostáváme

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > (a_{11} - a_{22})^2,$$

tj.

$$4a_{12}a_{21} > 0.$$

Tato podmínka podle předpokladu platí.

Ukázali jsme tedy, že má-li matice druhého řádu kladné prvky, pak existuje dominantní, kladné, reálné vlastní číslo, a jemu odpovídající vlastní vektor $\boldsymbol{r_1}$ má kladné souřadnice.

Otázkou nyní je, zda lze tuto početní úvahu rozšířit i na matice obecného řádu. Kladnou odpověď dal v roce 1907 Oscar Perron[1].

Věta 3.2 (Perronova)**.** *Nechť A je kladná čtvercová matice. Pak existuje reálné kladné vlastní číslo λ matice A, které je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, a navíc představuje spektrální poloměr pro danou matici A. Tomuto vlastnímu číslu λ odpovídá vlastní vektor $\boldsymbol{r}$ s kladnými souřadnicemi (tj. $r_i > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$).*

V roce 1912 rozšířil znění Perronovy věty na obecnější případ Georg Frobenius[2].

Věta 3.3 (Perronova-Frobeniova)**.** *Nechť A je nezáporná ireducibilní čtvercová matice. Pak existuje reálné kladné vlastní číslo λ, které je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, a navíc představuje spektrální poloměr pro danou matici A. Tomuto vlastnímu číslu λ odpovídá vlastní vektor $\boldsymbol{r}$ s kladnými souřadnicemi (tj. $r_i > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$).*

Vektor, jehož existenci zaručuje Perronova-Frobeniova věta, budeme nazývat *Perronovým vektorem.*

Otázkou, kterou Frobenius v této souvislosti položil, je, zda uvedené vlastní číslo λ, které je spektrálním poloměrem dané matice A, je navíc i dominantním vlastním číslem. Proto zavedl následující definici.

Definice 3.4. Nezáporná čtvercová matice A se nazývá *primitivní*, pokud je ireducibilní a má dominantní vlastní číslo.

Jednoduchou podmínku, aby matice A byla primitivní, udává následující tvrzení.

Věta 3.5. *Je-li čtvercová matice A nezáporná, pak je primitivní právě tehdy, když A^m je kladná matice pro vhodné přirozené m.*

Na závěr této kapitoly se zabývejme otázkou, jak lze určit Perronův vektor dané matice A numericky. Jako účinná metoda se jeví zejména mocninná metoda (viz např. [5]), která umí nalézt (v přibližném tvaru) vlastní vektor odpovídající dominantnímu vlastnímu číslu (což je za výše uvedených podmínek právě Perronův vektor).

---

[1]Oscar Perron (1880 - 1975) byl matematik německé národnosti a profesor na univerzitě v Heidelbergu a Mnichově. Zabýval se hlavně diferenciálními, parciálními diferenciálními rovnicemi a lineární algebrou. Kromě již zmíněného teorému je například autorem tzv. Perronova paradoxu.

[2]Georg Frobenius (1849 - 1917) byl matematik německé národnosti, který se zabýval diferenciálními rovnicemi nebo teorií čísel. Je autorem řady známých výsledků, například jako první dokázal Cayley-Hamiltonovu větu. Byl studentem Karla Weierstrasse.

3.1. Mocninná metoda

Uvažujme čtvercovou matici A a předpokládejme, že má dominantní vlastní číslo λ_1. Pak *mocninná metoda* vychází ze vztahu

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{r},$$

kde $\boldsymbol{r_0}$ je startovací vektor, který je lineární kombinací vlastních vektorů matice A, a $\boldsymbol{r}$ je vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu λ_1.

Poznamenejme, že metoda má i svoje nedostatky, např. je-li $|\lambda_1| > 1$, může dojít k tzv. přetečení, a pro $|\lambda_1| < 1$ může dojít naopak k podtečení. Proto je vhodné v každém aproximačním kroku vektor $\boldsymbol{r_k} = A^k \boldsymbol{r_0}$ normovat, a použít místo toho tzv. *normalizovanou* mocninnou metodu.

3.2. Normalizovaná mocninná metoda

Normalizovaná mocninná metoda je dána vztahem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n \boldsymbol{r_0}}{\|A^n \boldsymbol{r_0}\|} = \boldsymbol{r},$$

kde $\boldsymbol{r_0}$ je startovací vektor, $\boldsymbol{r}$ je vlastní vektor příslušný λ_1 a $\|.\|$ je euklidovská norma.

Poznamenejme ještě, že příslušné dominantní vlastní číslo λ_1 pak lze dopočítat z tzv. Rayleighova podílu

$$\lambda_1 = \frac{\boldsymbol{r}^T A \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{r}}.$$

4. Hodnotící a turnajová matice

V této kapitole zavedeme dva speciální typy matic, které již mají přímou vazbu na hodnocení sportovních týmů.

4.1. Hodnotící matice

Výsledky zápasů v rámci soutěže jsou vždy někde zapsány a reprezentovány různými způsoby. Na mnoha turnajích, kde se nehraje hned od začátku vyřazovací část, jsou výsledky často reprezentovány tabulkou. Pokud nepočítáme záhlaví a první sloupec s názvy týmů, tabulka pro turnaj o n týmech má obvykle n sloupců a n řádků.

Týmům se na začátku turnaje přiřadí jejich pozice v tabulce. Její buňky pak jsou body ze vzájemného střetnutí, případně skóre (například 3:5), nebo kombinace obou faktorů.

Ilustrujme tento pojem na příkladu fotbalového turnaje, jehož se zúčastní týmy T_1 až T_5, přičemž časové okolnosti nedovolí, aby se všechny týmy navzájem utkaly. Užijeme přitom tradiční bodové hodnocení, kde za výhru se udělí tři body, za remízu jeden bod a za prohru žádný. V případě, že týmy proti sobě nehrály, políčko necháme proškrtlé. Příklad příslušné tabulky ukazuje tabulka 4.1. Ta popisuje turnaj, kdy tým T_1 porazil tým T_2, tým T_3 remizoval s týmem T_1, tým T_3 se neutkal s týmem T_5, atd. Políčko tabulky v i-tém řádku a j-tém sloupci tedy

—	Tým T_1	Tým T_2	Tým T_3	Tým T_4	Tým T_5
Tým T_1	—	3	1	0	1
Tým T_2	0	—	0	3	3
Tým T_3	1	3	—	0	—
Tým T_4	—	0	3	—	0
Tým T_5	1	0	3	0	—

Tabulka 4.1. Příklad výsledkové tabulky z fotbalového turnaje.

značí výsledek zápasu týmu T_i s T_j. Diagonalní pole z pochopitelných důvodů proškrtáváme.

Turnajovou tabulku lze z hlediska matematického zápisu reprezentovat tzv. *hodnotící maticí.*

Definice 4.1. Hodnotící maticí A rozumíme nezápornou čtvercovou matici řádu n s nulovými prvky na hlavní diagonále:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

V této matici tedy prvek a_{ij} reprezentuje celkový bodový zisk týmu i proti týmu j. Je-li tento prvek nulový, tak to obvykle znamená, že tým i proti týmu j vůbec nehrál, nebo s ním prohrál (která z těchto variant nastává lze snadno poznat z hodnoty prvků a_{ji}). Poznamenejme, že v některých hodnotících maticích se kladný bodový zisk uděluje i za prohru.

Volbě koeficientů hodnotící matice se budeme prodrobněji věnovat v následujících kapitolách. Nejprve však uvedeme dva příklady bodování z hokejového a basketbalového turnaje.

4.1.1. Hokej. Během prvního kola hokejového turnaje o pěti týmech T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 bylo odehráno šest utkání s výsledky uvedenými v tabulce 4.2.

Domácí	Hosté	Výsledek utkání
tým T_1	tým T_2	1:2 v základní hrací době
tým T_1	tým T_3	3:1 v základní hrací době
tým T_4	tým T_5	4:1 v základní hrací době
tým T_2	tým T_5	2:1 po samostatných nájezdech
tým T_4	tým T_1	5:3 v základní hrací době
tým T_3	tým T_4	3:2 v prodloužení

Tabulka 4.2. Výsledky hokejových zápasů ilustračního příkladu.

Pokud uvažujeme typické hokejové bodování, pak prvky hodnotící matice volíme takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{tým } i \text{ zvítězil nad týmem } j \text{ v základní hrací době,} \\ 2, & \text{tým } i \text{ zvítězil nad týmem } j \text{ v proloužení nebo SN,} \\ 1, & \text{tým } i \text{ prohrál s týmem } j \text{ v proloužení nebo SN,} \\ 0, & \text{tým } i \text{ prohrál proti týmu } j \text{ v základní hrací době,} \\ & \text{nebo se týmy spolu nestřetly.} \end{cases}$$

Příslušná hodnotící matice tohoto turnaje má tedy tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.2. Basketbal. Při ilustraci basketbalového turnaje předpokládáme pro lepší názornost, že zápasy pěti týmů dopadly stejně jako v případě hokejového turnaje, viz tabulku 4.3 (pouze upravíme dosažené koše oproti vstřeleným gólům do realis-

Domácí	Hosté	Výsledek utkání
tým T_1	tým T_2	88:92 v základní hrací době
tým T_1	tým T_3	94:64 v základní hrací době
tým T_4	tým T_5	106:76 v základní hrací době
tým T_2	tým T_5	87:78 v prodloužení
tým T_4	tým T_1	111:98 v základní hrací době
tým T_3	tým T_4	82:75 v prodloužení

Tabulka 4.3. Výsledky basketbalových zápasů ilustračního příkladu.

tických čísel). Při užití běžného bodování basketbalových zápasů

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{tým } i \text{ vyhrál proti týmu } j, \\ 1, & \text{tým } i \text{ prohrál s týmem } j, \\ 0, & \text{tým } i \text{ neodehrál zápas proti týmu } j \end{cases}$$

dostaneme následující hodnotící matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Turnajová matice

V této sekci se nejdříve zaměříme na maticové popisy tzv. ideálních turnajů. Tím máme na mysli soutěže, ve kterých všechny týmy hrají proti sobě právě jednou, a každý zápas má svého vítěze (tj. remíza není možná). V anglické literatuře lze tento typ turnaje najít pod názvem „single round robin tournament“, který pro přehlednost zkrátíme pouze na „round-robin“.

Výsledky utkání z takových turnajů reprezentuje hodnotící matice, kde v případě vítězství týmu i nad týmem j klademe $a_{ij} = 1$, v případě prohry $a_{ij} = 0$. Tento speciální případ hodnotící matice (obsahující pouze jedničky nebo nuly) má mnoho zajímavých vlastností, například v souvislosti se sestavováním pořadí týmů. Proto se pro tento typ hodnotící matice zavedl speciální název, tzv. *turnajová matice*. Turnajovou maticí (popsanou v [2]) tedy rozumíme každou hodnotící matici A, jejíž prvky splňují $a_{ij} = 0$ nebo 1, přičemž $a_{ij} + a_{ji} = 1$ pro každé $i \neq j$.

Přirozenou otázkou je, jak lze z této matice odvodit nějaké závěry o síle jednotlivých týmů. Než tuto otázku zodpovíme, shrneme některé základní vlastnosti turnajových matic.

4.2.1. Vlastnosti turnajové matice. Nejprve uvedeme čtyři základní vlastnosti turnajových matic, které budeme následně ilustrovat a komentovat na příkladu.

Vlastnost 1. Nechť I je jednotková matice a J je čtvercová matice téhož řádu, jejímiž prvky jsou samé jedničky. Pak pro každou turnajovou matici A platí

$$A + A^T = J - I.$$

Vlastnost 2. Je-li A turnajová matice, pak je A^T také turnajovou maticí.

Vlastnost 3. Je-li A turnajová matice, pak každá submatice matice A, vzniklá vynecháním řádků a sloupců stejných indexů, je turnajová matice.

Vlastnost 4. Nechť P je libovolná permutační matice. Je-li A turnajová matice, pak PAP^T je také turnajová matice.

Příklad 4.2. Uvažujme turnajovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

která reprezentuje turnaj, kde tým T_1 porazil tým T_4, T_3 porazil T_2, tým T_4 porazil T_3, atd. Pro upřesnění, výsledky týmu T_i zachycuje i-tý řádek turnajové matice.

Snadno ověříme, že vlastnost 1 platí, neboť

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I.$$

Podobně, transponovaná matice

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je také turnajová.

Všimněme si její souvislosti s původní turnajovou maticí A. Protože při transpozici čtvercové matice zaměníme prvky symetricky podle hlavní diagonály, matice A^T představuje turnaj, během kterého dopadly všechny výsledky zápasů přesně naopak ve srovnání s turnajem reprezentovaným původním matici A.

Odvození vlastností 1 a 2 je triviální a je tomu i v případě vlastnosti 3. Skutečně, při vynechání libovolného počtu řádků a sloupců stejných indexů dostaneme matici s nulovou hlavní diagonálnou, prvky a_{ij} rovny nule nebo jedničce, přičemž $a_{ij} + a_{ji} = 1$ pro $i \neq j$. Každá taková submatice je proto také turnajovou maticí. Pro ilustraci si uvedeme dva příklady těchto submatic:

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice vlevo značí turnajovou matici při vynechání druhého, třetího řádku a sloupce. Napravo pak při vynechání řádku a sloupce s indexem jedna.

Konečně vlastnost 4 nám říká, že že prohozením libovolného počtu řádků a sloupců stejných indexů dostaneme také turnajovou matici.

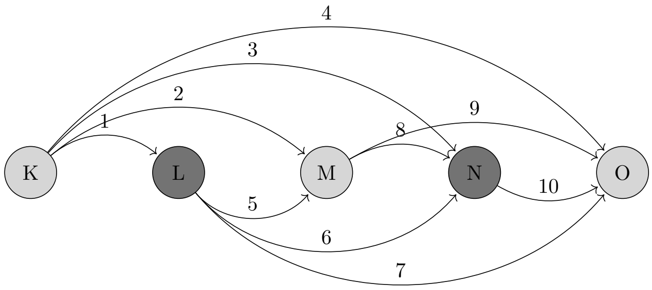
4.2.2. Počet turnajových matic a různých turnajů. Zajímavou otázkou je, jaký je celkový počet turnajových matic dimenze n, a dále kolik existuje různých turnajů. Mohlo by se zdát, že se jedná o ekvivalentní pojmy a není mezi nimi žádný rozdíl; později ukážeme, že ve skutečnosti je tomu ale naopak. Určeme celkový počet zápasů „round robin“ turnaje o n týmech. Tento počet je roven výrazu

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k).$$

Tato hodnota je také ilustrována na obrázku 4.1 znázorňující počet utkání turnaje pěti mužstev.

Ekvivalentně, výsledný počet všech utkání lze také vyjádřit pomocí kombinačního čísla, protože hledáme všechny různé kombinace dvou týmů z n celkových. (Jedná se o klasickou kombinaci bez opakování.) Výsledný počet je potom roven $\binom{n}{2}$.

Známe-li celkový počet utkání, můžeme určit počet všech možných turnajových matic. V uvažovaném turnaji může každý zápas dopadnout dvěma způsoby. Neznáme-li výsledek jednoho zápasu, pak máme na výběr ze dvou turnajových matic. Pokud neznáme výsledky dvou zápasů, vybíráme mezi čtyřmi různými turnajových matice. Pro tři neznámé výsledky se nabízí osm možných turnajových matic, atd. Obecně, je-li m neznámých výsledků, pak dostáváme 2^m možných turnajových matic. Protože celý „round robin“ turnaj má $\binom{n}{2}$ zápasů, existuje $2^{\binom{n}{2}}$



Obrázek 4.1. Grafické znázornění počtu zápasů.

turnajových matic pro tento turnaj n týmů, kde každý hraje s každým pouze jednou.

Nyní se vraťme k otázce jednoznačného vztahu mezi výsledky daného turnaje a příslušnou turnajovou maticí. Uvažujme turnajovou matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Při srovnání s maticí A z Příkladu 4.2 se zdá, že matice B reprezentuje jiný turnaj. Ve skutečnosti však může reprezentovat ten stejný. Všimněme si, že matice B vznikla z matice A pouhou záměnou prvního a třetího řádku a sloupce. Pokud bychom tedy ve stejném smyslu zaměnili i řádkové a sloupcové indexy jednotlivých týmů, matice B reprezentuje stejné výsledky turnaje jako matice A.

Pro lepší přehlednost je tato operace naznačena ve dvou tabulkách. Tabulka 4.4 odpovídá turnajové matici A, tabulka 4.5 turnajové matici B (kterou jsme obdrželi výše uvedenou transformací matice A včetně záměny příslušných indexů). Jinak

—	Tým T_1	Tým T_2	Tým T_3	Tým T_4
Tým T_1	—	0	0	1
Tým T_2	1	—	0	0
Tým T_3	1	1	—	0
Tým T_4	0	1	1	—

Tabulka 4.4. Vyjádření turnajové matice A.

—	Tým T_3	Tým T_2	Tým T_1	Tým T_4
Tým T_3	—	1	1	0
Tým T_2	0	—	1	0
Tým T_1	0	0	—	1
Tým T_4	1	1	0	—

Tabulka 4.5. Vyjádření turnajové matice B.

vyjádřeno, číslo $2^{\binom{n}{2}}$ nám tedy neudává počet různých turnajů, ale pouze počet možných tvarů turnajové matice.

Z předcházející diskuze vyplývá, že dva turnaje (reprezentované turnajovými maticemi například C a D) budeme považovat za různé, jestliže žádnou záměnou řádků a sloupců matice C neobdržíme matici D, matematicky vyjádřeno: neexistuje permutační matice P taková, že

$$D = PCP^T.$$

Pod pojmem různé turnaje budeme tedy rozumět, že jakoukoliv záměnou řádků a sloupců matice C příslušící jednomu turnaji nedostaneme matici D odpovídající turnaji druhému.

Tabulka 4.6 ilustruje počet různých turnajů při n účastnících ($n = 2, 3, \ldots, 8$).

Počet účastníků n	počet tříd
2	1
3	2
4	4
5	12
6	56
7	456
8	6880

Tabulka 4.6. Tabulka počtu různých „round robin“ turnajů.

5. Použití Perronovy-Frobeniovy věty v rankingových metodách

V předcházející kapitole jsme stručně uvedli pojmy hodnotící a turnajové matice. Nyní ukážeme, jak lze těchto matic využít při sestavení pořadí na základě vzájemných utkání. Uvedeme dva různé přístupy, které vedou na zajímavou aplikaci Perronovy-Frobeniovy věty.

5.1. Stanovení pořadí pomocí turnajové matice (Kendall-Wei metoda)

Základní poznatky pro tuto sekci byly brány z článku [2]. V turnaji, kde se každý tým utká se všemi ostatními právě jednou - jedná se o typ „round robin“, skončilo poslední utkání, a my bychom chtěli za pomoci turnajové matice A sestavit celkové pořadí účastníků (v našem případě týmů), aby na každé pozici byl nejlépe pouze jeden tým. To učiníme tak, že každému týmu přisoudíme tzv. *skóre*, tedy nezáporné reálné číslo, které vhodným způsobem charakterizuje výsledky zápasů s ostatními týmy. Následně skóre porovnáme. Čím větší bude hodnota skóre týmu, tím výše bude v pořadí umístěn.

Uvažujme tedy obecnou turnajovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Začneme nejjednodušší a nejpřirozenější cestou – skóre každého týmu zavedeme jako součet jeho vítězství, tedy součet všech prvků v turnajové matici A na příslušném řádku.

Pro tým i bude výsledné skóre s_i tvaru

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \cdots + a_{in} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij},$$

kde člen a_{ij} značí výsledek utkání proti týmu j.

Užitím maticového zápisu lze pak skóre $\boldsymbol{s}$ jednotlivých týmů psát ve tvaru

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} + ... + a_{1n} \\ a_{21} + a_{23} + ... + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{(n-1)n} \end{pmatrix},$$

vektorově zapsáno

$$\boldsymbol{s} = A\boldsymbol{e}, \tag{5.1}$$

kde $\boldsymbol{e}$ je sloucový vektor jedniček.

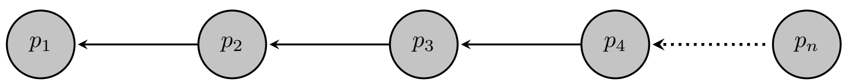
Dostali jsme tzv. *vektor skóre* $\boldsymbol{s}$, jehož i-tá složka odpovídá počtu vítězství i-tého týmu. Při stanovení pořadí tedy můžeme říci, že tým i je lepší než tým j, pokud platí nerovnost

$$s_i > s_j.$$

V případě, že každý tým bude mít různý počet vítězství, týmy jednoduše seřadíme na základě ostrých nerovností

$$s_{p_1} > s_{p_2} > \cdots > s_{p_n},$$

kde $(\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ je vhodná permutace prvků $1, \ldots, n$. Situace, kdy každý



Obrázek 5.1. Seřazení týmů v nejjednodušším případě.

tým má odlišný počet vítězství, nastává pouze a jen pouze v případě, kdy se nám turnajovou matici A povede, pomocí permutační matice P, převést na ryze horní trojúhelníkový tvar

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento fakt si můžeme ověřit i podle vektoru skóre, kdy první tým bude mít $n-1$ výher, druhý tým $n-2$, atd., až dojdeme k poslednímu účastníkovi, který skončil s nula body – tedy nevyhrál ani jedno utkání. Pro vektor skóre platí

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Často se ale ovšem stává, že více týmů má stejný počet vítězství, takže některé ostré nerovnosti v uspořádání týmů podle počtu výher jsou nahrazeny neostrými nerovnostmi. Týmům ale, jak už bylo výše zmíněno, nechceme přiřadit dělené místo, nebo jich alespoň chceme mít co nejméně. Proto se podíváme, jak při této situaci postupovat.

5.1.1. Blokový tvar matice. Turnajovou matici bychom mohli výměnou řádků a sloupců stejných indexů, tedy pomocí vhodné permutační matice P, převést na blokově horní tvar

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

kde A_{11} a A_{22} jsou čtvercové bloky řádu k a $n-k$. Matice A_{12} je dimenze $k\times(n-k)$.

Po provedení této transformace je turnajová matice tvaru

$$PAP^T = \begin{pmatrix} & & & 1 & \cdots & 1 \\ & A_{11} & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & A_{22} & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Můžeme si všimnout, že blok matice A_{12} obsahuje samé jedničky. Tato informace je důležitá především z toho hlediska, že každý z prvních k týmů porazil tým ze skupiny zbývajících $n-k$ týmů. Mohli bychom tedy konstatovat, že prvních k týmů je lepších (minimálně podle počtu vítězství), než zbylých $n-k$ týmů. Toto tvrzení si můžeme ověřit i na bodových ziscích. Prvních k týmů má alespoň $n-k$ výher, a zbytek vyhrál maximálně $n-k-1$ střetnutí.

Matematicky vyjádřeno: pro všechna $i = 1, 2, \dots, k$, a pro všechna $j = k+1, k+2, \dots, n$ platí

$$s_i > s_j.$$

Hodnotit a určovat pořadí pak stačí jen v rámci jednotlivých bloků, rozkládat je dál, a to tak dlouho, dokud je výše popsaná procedura proveditelná. Všimněme si, že horní trojúhelníkový tvar matice je vlastně pouze speciálním případem blokové matice, kde se nám matici podaří rozložit takovým způsobem, že konečné bloky jsou matice řádu jedna.

5.1.2. Ireducibilní matice. Pokud blok v nějakém kroku již dále transformovat výše popsaným způsobem nelze (speciálně, celá turnajová matice A nelze takto rozložit), budou v matici minimálně dva týmy se stejným počtem vítězství. Buď se smíříme s faktem, že některé týmy budou na stejných příčkách, nebo musíme pokračovat v hledání, jak určit jejich pořadí.

Maticí, kterou nemůžeme rozložit, je právě matice ireducibilní zavedená v druhé kapitole. V další části se proto zaměříme pouze na turnaje, kde se taková turnajová matice vyskytuje, protože v předchozích případech, kdy byla matice tzv. *reducibilní*, pořadí určit umíme.

Pojem ireducibility matic jde vysvětlit na orientovaných grafech. Potřebné pojmy zde užijeme pouze v intuitivním smyslu, protože nám především jde o názornou ukázku.

5.1.3. Silně souvislý graf. Graf se skládá z vrcholů a hran, které zobrazují vztahy právě mezi vrcholy. V orientovaném grafu se navíc dá určit, kde má každá hrana začátek a konec. Orientovaný graf nazveme silně souvislý, pokud se z každého vrcholu dostaneme do všech zbývajících vrcholů. Matice s nezápornými členy je pak ireducibilní pouze tehdy, pokud odpovídající orientovaný graf je silně souvislý (více podrobností viz [6]).

Nyní si ukážeme ilustrační příklad.

Příklad 5.1. Máme matice s výsledky dvou různých fotbalových turnajů pro pět týmů. Týmy označíme postupně A, B, C, D a E, a přiřadíme jim indexy v matici jedna až pět. Matice nazveme například M a O.

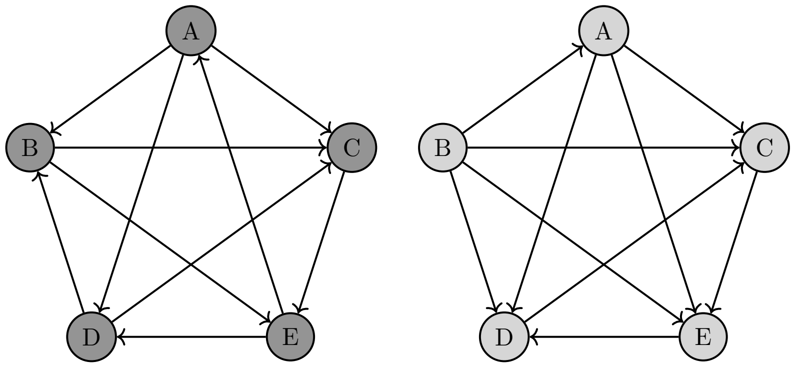
Účastníci proti sobě v každém turnaji hráli jen jednou, za výhru obdrželi jeden bod a za prohru žádný. Výsledky obou turnajů zachycují následující turnajové matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Orientovaný graf odpovídající příslušné turnajové matici sestrojíme tak, že si nejprve zakreslíme vrcholy odpovídající jednotlivým týmům s přidělenými indexy, viz obrázek 5.2. Kde není v matici nula uděláme hranu se začátkem v indexu řádku a koncem v indexu sloupce. Pokud tedy například $a_{51} = 1$, tzn. vyhrál tým s přiřazeným indexem pět nad celkem s indexem jedna, sestrojíme hranu s orientací z bodu E do A.

Z obrázku 5.2 lze vidět, že M je ireducibilní. Naopak turnajová matice O není, jedná se o reducibilní matici, kterou jsme schopni dokonce rozložit do tří bloků ve tvaru

$$POP^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 5.2. Orientované grafy příslušné turnajovým maticím M a O.

Shrňme zatím nabyté poznatky. Pokud jsme turnajovou matici schopni převést na ryze horní trojúhelníkový tvar, má každý tým odlišný počet vítězství, a týmy jednoduše seřadíme právě podle počtu výher. V opačném případě jsme schopni turnajovou matici rozložit do bloků. V rámci různých bloků můžeme jednotlivé týmy porovnat, avšak uvnitř v jednotlivých blocích již ne. Budeme se tedy dále zabývat otázkou, jak určit pořadí v ireducibilních turnajových maticích.

Podívejme se na prvky turnajové matice. Pokud součin členů $a_{ij}a_{jk}$ je nenulový, výplývá z toho, že tým i porazil j a tým j porazil k. Dá se tedy říci, že tým i je silnější než j, a ten je silnější než k. Součin můžeme zobecnit na

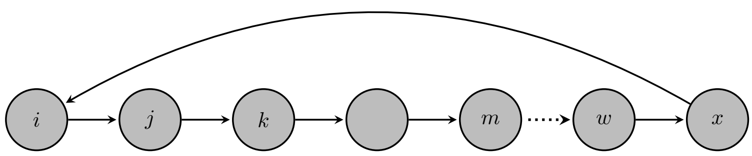
$$a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{lm}...a_{wx},$$

jehož nenulovost znamená, že tým i by měl být silnější než tým x.

Pro každou ireducibilní turnajovou matici v rámci těchto součinů narazíme na zajímavou situaci. V ireducibilní matici pro každého účastníka „round robin" turnaje se objeví nenulový součin tvaru

$$a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{lm}...a_{wx}a_{xi},$$

z čehož vyplývá paradox, že tým i by měl být lepší než tým i. V praxi to znamená, že silný tým prohrál s outsiderem. Pro lepší představu si tento nenulový součin můžeme ukázat na grafu (šipka směřuje od vítězného týmu k poraženému), viz obrázek 5.3.



Obrázek 5.3. Grafické znázornění nenulového součinu koeficientů turnajové matice.

Toto je vlastně další zdůvodnění, proč se nám ireducibilní matice nepodaří nikdy převést na blokově horní tvar. V každém sloupci bude totiž vždy minimálně jedna jednička a dvě nuly (diagonální prvek plus minimálně jedna prohra).

5.1.4. Zohlednění výkonnosti soupeřů. Smyslem dalších úvah je navrhnout způsob hodnocení týmů v rámci ireducibilních turnajových matic.

Uvědomme si, že za silný tým se považuje takový tým, který poráží většinu svých protivníků. Naopak slabý tým moc zápasů nevyhrává, a když už se mu podaří zvítězit, tak poraženým je většinou tým podobné výkonnosti. Chtěli bychom tedy, aby výsledné skóre týmu nezáleželo pouze jen na výsledku utkání, ale i na tom, proti jakému soupeři se hrálo.

Nové skóre zadefinujeme jako součet výher všech týmů, které tým i porazil. Jelikož v našem případě tým za vítězství obdrží jeden bod, nově navržené skóre vypadá takto:

$$s_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + a_{i3}s_3 + \cdots + a_{in}s_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}s_j.$$

Výsledný počet bodů už tedy nezávisí pouze na výsledcích týmu, ale více reflektuje schopnosti protivníka – a o to nám přesně jde. Pro všechny týmy by maticový zápis takto modifikovaného skóre měl tvar

$$\boldsymbol{s_2} = A^2\boldsymbol{e}. \tag{5.2}$$

Abychom ještě více zohlednili kvalitu protivníků, vynásobme $\boldsymbol{s_2}$ opět maticí A zleva, čímž získáme nový vektor skóre

$$\boldsymbol{s_3} = A^3\boldsymbol{e}. \tag{5.3}$$

Jinak vyjádřeno pro i-tý tým získáme skóre

$$s_{3i} = a_{i1}s_{21} + a_{i2}s_{22} + a_{i3}s_{23} + \cdots + a_{in}s_{2n} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}s_{2j}.$$

Slovní interpretace tohoto výrazu je, že se jedná o součet součtů všech vítězství týmů, které tým i porazil. U vektoru $A^3\boldsymbol{e}$ se nám tedy ještě více projevila zavislost mezi jednotlivými týmy.

Lze tedy konstatovat, že s rostoucí mocninou n dává vektor skóre

$$\boldsymbol{s_n} = A^n\boldsymbol{e}$$

stále věrohodnější výsledek. Uvážíme-li tedy vztahy (5.1), (5.2) a (5.3), pak v jistém smyslu ideální vektor skóre je dán vztahem

$$\lim_{n\to\infty} A^n\boldsymbol{e}.$$

Se zvyšováním mocniny matice A mohou složky vektoru skóre neúměrně narůstat. Protože nám jde pouze o porovnání jednotlivých složek, provedeme normování

$$\frac{A\boldsymbol{e}}{\|A\boldsymbol{e}\|}, \frac{A^2\boldsymbol{e}}{\|A^2\boldsymbol{e}\|}, \frac{A^3\boldsymbol{e}}{\|A^3\boldsymbol{e}\|}, \ \ldots, \ \frac{A^n\boldsymbol{e}}{\|A^n\boldsymbol{e}\|},$$

a na tuto posloupnost opět aplikujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n \boldsymbol{e}}{\|A^n \boldsymbol{e}\|}.$$

Všimněme si, že získaný vektor skóre je právě Perronův vektor matice A vypočtený mocninnou metodou. Zdůrazněme přitom, že turnajová matice A je podle předpokladu ireducibilní a nezáporná, podle Perronovy-Frobeniovy věty musí Perronův vektor existovat.

Ilustrujme nově získaný způsob hodnocení na následujících dvou příkladech.

Příklad 5.2. V příkladu 5.1 jsme ukázali, že matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

která popisuje fotbalový turnaj pěti týmů A, B, C, D a E, je ireducibilní. Vektor skóre, který značí počet vítězství jednotlivých týmů je roven

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Tři týmy mají stejný počet vítězství, a kdybychom je seřazovali pouze podle počtu vítězných zápasů, druhé místo by obsadily tři týmy, a tomu bychom se chtěli vyhnout. Spočítejme tedy modifikované skóre pomocí normalizované mocninné metody. Vypočtený Perronův vektor (za pomoci Matlabu při zvolené přesnoti $\epsilon = 10^{-5}$) dostáváme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0{,}5798 \\ 0{,}4251 \\ 0{,}2765 \\ 0{,}3771 \\ 0{,}5143 \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že zohlednění kvality protivníka nám pomohlo, a týmy už můžeme seřadit na základě nerovností

$$s_A = 0{,}5798 > s_E = 0{,}5143 > s_B = 0{,}4251 > s_D = 0{,}3771 > s_c = 0{,}2765.$$

Na první místě se umístil tým A, druhé místo obsadil tým E, protože svá vítězství si uhrál proti silnějším soupeřům, než týmy se stejným počtem vítězství, a poslední volné místo na stupních vítězů si vybojoval tým B.

Ani výše popsaná metoda, využívající stanovení pořadí týmů podle Perronova vektoru, nemusí vést k jednoznačnému závěru. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

Příklad 5.3. Druhou matici O uvažovanou v příkladu 5.1 jsme byli schopni rozložit do tří bloků, stručně

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies POP^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde dva čtvercové bloky jsou řádu jedna, zbývající je řádu tři. Vektor skóre turnajové matice O má tvar

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

První, resp. druhé místo je jasné, obsadil ho tým B, resp. tým A. Chtěli bychom určit, kdo je doplní na stupních vítězů, tedy pokusit se sestavit pořadí mezi týmy C, D a E. Můžeme si ale všimnout, že pořadí mezi nimi určit nepůjde, protože se nám zde vytvořil cyklus, v jehož rámci není možné rozhodnout, kdo je lepší, nebo horší. Vyzkoušejme, že tuto okolnost nám potvrdí i metoda založená na Perronově vektoru.

Uvažujme ireducibilní blok matice POP^T, který znázorňuje výsledky utkání mezi týmy C, D a E, jako samostatnou turnajovou matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a pořadí určeme pouze mezi nimi (zdůrazněme, že výsledky jejich utkání s tými A a B na tomto nic nemění). Přímým výpočtem jde ověřit, že Perronův vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ matice B (které je sice spektrálním poloměrem, nikoliv však dominantním vlastním číslem matice B) je roven

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že i podle Perronova vektoru složky skóre všech týmů jsou stejné, a tedy nemůžeme ani touto metodou rozhodnout o pořadí mezi nimi.

Závěr tohoto příkladu můžeme zobecnit v tom směru, že týmy nejsme schopni jednoznačně seřadit (pomocí výše popsaných metod), pokud je v každém řádku a každém sloupci nějakého ireducibilního bloku turnajové matice právě jedna jednička.

5.2. Stanovení pořadí pomocí hodnotící matice (Keenerova metoda)

Perronova-Frobeniova věta lze využít i v jiných typech soutěží než jen v „round robin“ turnajích. Jedná se především o soutěže, kde týmy proti sobě stejný počet zápasů nehrají (například NHL), nebo dokonce se některé týmy neutkají vůbec (například NFL). Velmi typické je to také pro různé univerzitní ligy napříč všemi kontinenty.

Na první pohled by se mohlo zdát, že bychom mohli bodový zisk každého týmu jednoduše vydělit počtem jeho zápasů (aby nebyly zvýhodněny týmy s větším počtem odehraných zápasů), určit průměrný zisk bodů na utkání, a podle toho sestavit pořadí. Tento způsob ale není vhodný z několika důvodů. Například týmy, které měly konkurenceschopnější soupeře, by byly znevýhodněné vůči celkům, které se převážně utkávaly se slabými týmy, a získávaly tak body snáze. Rozdíl v bodech na zápas by pak mezi těmito celky mohl být opravdu výrazný, a nezohledňoval by skutečné rozložení sil v soutěži.

Proto bychom chtěli zavést způsob hodnocení, kde by výsledný bodový zisk z utkání nezávisel pouze na výsledku, ale nějakým způsobem by reflektoval i protivníkovy schopnosti. Uvidíme, že dojdeme ke stejnému matematickému principu, jako v přechozí sekci. Výsledky, které uvedeme, jsou čerpány z článku [1].

5.2.1. Teoretické odvození. Chtěli bychom tedy, aby výsledný bodový zisk týmu z utkání nezáležel pouze na výsledku, ale i na soupeři, tedy na jakési síle protivníka. Mohli bychom ho tedy získat jako součin bodů z výsledku zápasu a právě síly soupeře. Je možné, že všechny týmy nebudou hrát proti sobě. Pokud se tak stane, počet bodů proti tomuto týmu je roven automaticky nule. Situaci, kdy má každý tým jiný počet zápasů, ošetříme vydělením celkového počtu bodů počtem odehraných zápasů n_i týmu i. Závěrečné skóre i-tého týmu bychom mohli psát tedy ve tvaru

$$s_i = \frac{1}{n_i}(b_{i1}r_1+b_{i2}r_2+b_{i3}r_3+\cdots+b_{in}r_n) = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}r_j \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.4}$$

kde b_{ij} značí celkový zisk bodů týmu i proti týmu j, r_j sílu týmu j, a n celkový počet týmů v soutěži.

Sestavení tvaru skóre bylo jednoduché. Nyní je potřeba vyřešit hlavní část, tedy najít vektor síly $\boldsymbol{r}$, který byl zatím popsán jen neurčitě. Je přirozené zavést sílu r_i i-tého týmu jako úměrnou jeho bodovému zisku s_i, tj.

$$s_i = \lambda r_i \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.5}$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta úměrnosti.

Do definičního vztahu (5.4) nyní za s_i dosadíme (5.5). Pro lepší přehlednost rovnici ještě zjednodušíme tak, že výraz $\frac{1}{n_i}b_{ij}$ nahradíme symbolem a_{ij}. Dostáváme tak

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}r_j = \lambda r_i,$$

nebo-li vektorově

$$\boldsymbol{s} = A\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{r}, \tag{5.6}$$

kde $A = (a_{ij})$ je výše popsaná čtvercová matice řádu n.

Jinak vyjádřeno, námi hledaný vektor $\boldsymbol{r}$ síly týmů je vlastním vektorem matice A, podobně jako u turnajů, kde každé dva týmy mezi sebou odehrají právě jeden zápas bez možnosti remízy.

Chtěli bychom, aby se body jen přičítaly, a ne odečítaly. Proto máme požadavek, aby hledaný vlastní vektor obsahoval pouze kladné složky. Existenci takového vlastního vektoru zajistí opět Perronova-Frobeniova věta. Všimněme si přitom, že konstanta úměrnosti λ mezi vektorem skóre a síly je právě spektrální poloměr matice A.

Zdůrazněme, že nyní už neuvažujeme turnajovou matici, ale používáme obecnější hodnotící matici, i ona je však z definice nezáporná. Pro užití Perronovy-Frobeniovy věty nám proto stačí pouze ověřit ireducibilitu A. V kladném případě výsledný vektor síly $\boldsymbol{r}$ vypočítáme pomocí normalizované mocninné metody, tedy

$$\boldsymbol{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{A^n \boldsymbol{r_0}}{\|A^n \boldsymbol{r_0}\|},$$

kde $\boldsymbol{r_0}$ je vhodný startovací vektor.

5.2.2. Volba koeficientů hodnotící matice. Na začátek připomeňme, že možnou volbou koeficientů turnajové matice jsme se nezabývali, neboť její koeficienty jsou pevně dané (viz sekce 4.2). Naopak výběr koeficientů hodnotící matice je velmi subjektivní záležitostí. Omezením je pouze nezápornost každého prvku matice. Ukážeme, že i na jednoduše vypadajícím rozdělení bodů, kde po celou dobu budeme uvažovat, že součet bodů obou týmů $b_{ij} + b_{ji}$ ze vzájemného zápasu je rovný jedničce, můžeme dosáhnout velmi zajímavých interpretací.

Začneme tím, že vítěz si z utkání odnese jeden bod, poražený žádný. Při variantě, kdy zápas skončí remízou, si týmy jeden bod rozdělí rovným dílem, každý získá polovinu. Tedy

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{tým } i \text{ vyhrál proti týmu } j, \\ 1/2, & \text{zápas skončil nerozhodně}, \\ 0, & \text{tým } i \text{ prohrál proti týmu } j. \end{cases}$$

Zajímavé údaje dostaneme, pokud se startovací vektor $\boldsymbol{r_0}$ (viz mocninná metoda) rovná vektoru samých jedniček, tedy $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{e}$. Při vynásobení matice A vektorem $\boldsymbol{r_0}$ zprava dostaneme jako v minulé sekci bodový zisk. Tentokrát se ale nebude jednat o celkový, nýbrž o průměrný zisk na zápas, protože dělíme počtem zápasů. Tento výsledek se ale dá interpretovat i trochu jinak.

V anglosaských zemích se někdy používá pojem „winning percentage“, nebo-li procento vyhraných zápasů. To dostaneme tak, že každému vítězství přidělíme váhu jedna, a každé remíze váhu poloviční. Potom tento pojem můžeme zachytit výrazem

$$w_i = \frac{W_i + \frac{1}{2}R_i}{N_i} \cdot 100\,\%,$$

kde W_i značí počet výher týmu i, R_i počet remíz a N_i celkový počet zápasů. Pokud se nyní podíváme detailněji, jak vypadá i-tý řádek našeho vektoru $A\boldsymbol{r_0}$, tak dojdeme k závěru, že díky našemu bodování (jeden bod za výhru, půl za remízu a nula za prohru) je vlastně roven výrazu w_i (vynecháme-li v něm vynásobení procenty), tedy

$$(A\boldsymbol{r_0})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}}{n_i} = \frac{W_i + \frac{1}{2}R_i + 0P_i}{n_i},$$

kde písmeno P_i značí počet proher týmu i.

Podívejme se, co dále dostaneme v případě, když vektor $A\boldsymbol{r_0}$ vynásobíme zleva maticí A. Pro i-tou složku vektoru nyní platí

$$\begin{aligned}(A^2\boldsymbol{r_0})_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{1}{n_j}\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \\ &= a_{i1}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n} b_{1k} + a_{i2}\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n} b_{2k} + \cdots + a_{in}\frac{1}{n_n}\sum_{k=1}^{n} b_{nk} \\ &= \frac{1}{n_i}\left(b_{i1}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n} b_{1k} + b_{i2}\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n} b_{2k} + \cdots + b_{in}\frac{1}{n_n}\sum_{k=1}^{n} b_{nk}\right).\end{aligned}$$

Víme, že $\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ je poměr počtu „vyhraných“ zápasů ku celkovému počtu zápasů (pro připomenutí, remízu uvažujeme stále jako polovinu výhry). Proto i-tá složka vektoru $A^2\boldsymbol{r_0}$ vyjadřuje průměr poměrů "vyhraných"zápasů ku celkovému počtu zápasů týmů, se kterými tým i neprohrál.

Vektor $A^2\boldsymbol{r_0}$ je oproti $A\boldsymbol{r_0}$ interpretačně věrohodnější, ale pořád obsahuje nevýhodu, které bychom se rádi zbavili. Velký vliv na pořadí u $A^2\boldsymbol{r_0}$ má totiž náročnost programu – tedy zvýhodňuje celky, které hrají proti silnějším týmům častěji.

Tuto nevýhodu odstraníme postupným zvyšovaním mocniny matice A. Proto je výsledný „ideální“ vektor síly opět roven výrazu

$$\boldsymbol{r} = \lim_{n\to\infty}\frac{A^n\boldsymbol{r_0}}{\|A^n\boldsymbol{r_0}\|}.$$

Bodování popsané výše můžeme bez problému použít, pokud se týmy během sezóny utkají vícekrát (při více zápasech je b_{ij} součet všech získaných bodů proti týmu j). S rostoucím počtem zápasů prvky matice b_{ij} a b_{ji} lépe vystihují vazby mezi oběma týmy.

V některých soutěžích se ale týmy potkávají pouze jednou ročně. Taková situace nastane například v některých univerzitních ligách v Severní Americe. Problémem potom je, že pokud byl zápas velmi vyrovnaný a skončil například 4:5, pak pouze vítěz bere celý bod a těsná výhra má stejnou váhu (ohodnocená jedním bodem) jako jasná převaha v utkání s výsledkem 5:0.

Mezi další nevýhody této volby koeficientů hodnotící matice bychom mohli také zařadit fakt, že tým se samými prohrami má relativní sílu nulovou a matice A v tom případě není ireducibilní. Navíc zápasy proti týmům s nulovou relativní sílou jsou pro ostatní týmy nevýhodné, protože jim výhra nic nepřidá, naopak ubere, protože budou mít o zápas navíc, a tím nižší skóre.

5.2.3. Spojité rozdělování bodu. Spravedlivější by tedy bylo mezi týmy jeden bod rozdělit spojitě. Jedním z možných kritérií, jak bod rozdělit, se nabízí např. počet vstřelených gólů.

Pokud ve vzájemném zápase tým i vstřelil G_{ij} gólů, a tým j G_{ji} gólů, pak bychom mohli bod rozdělit pomocí vztahu

$$b_{ij} = \frac{G_{ij}}{G_{ij} + G_{ji}}.$$

Bodový zisk druhého účastníka utkání získáme pouou záměnou indexů.

V případě nerozhodného stavu, $G_{ij} = G_{ji}$, si oba týmy stále odnesou po polovině, tj. $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}$.

Nevýhodou takového rozdělení, podobně jako v diskrétním případě je, že hra může být po celou dobu utkání velmi vyrovnaná, ale skončit dejme tomu 1:0. V tom případě by vítěz bral celý bod a poražený odešel s prázdnou. Abychom takovéto situaci předešli, předchozí funkci trochu upravíme, aby si tým i přes prohru alespoň nějakou část bodu mohl odnést. Tím pádem docílíme i toho, že tým se samými prohrami bude mít nenulový bodový zisk, a tedy i nenulovou relativní sílu.

Bodové ohodnocení lze proto nahradit výrazem

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{G_{ij}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}, & \text{pokud } i \neq j, \\ \frac{1}{2}, & \text{pokud } i = j. \end{cases}$$

Pokud zápas skončí remízou, stále platí, že si týmy odnesou po polovině bodu.

Narazili jsme však na další nedokonalost, tudíž že naše nové rozdělení neošetřuje situaci, kdy si velmi silný tým bude chtít nahnat body vysokými výhrami proti slabším týmům. Hodilo by se nám tudíž rozdělit bod mezi účastníky střetnutí nelineárně. Jako možný návrh nelineárního bodového ohodnocení uveďme

$$b_{ij} = h\left(\frac{G_{ij}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}\right), \tag{5.7}$$

kde

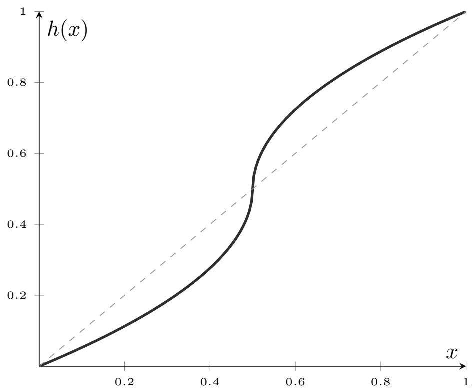
$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\Big(x - \frac{1}{2}\Big)\sqrt{|2x-1|}. \tag{5.8}$$

Pro lepší názornost si funkci h vykreslíme do grafu, kde pro srovnání tempa růstu přidáme i graf přímé úměrnosti, viz obrázek 5.4 Jak lze vidět, remíza pořád půlí bod na dvě poloviny. Průběh této hodnotící funkce však zaručuje, že zatímco mezi výhrou a prohrou je citelný rozdíl, mezi výhrami 5:0 nebo 8:0 už tak velký rozdíl není.

Abychom ilustrovali užití této nelineání hodnotící funkce, přikládáme také příslušnou tabulku, viz tabulku 5.1. Můžeme si všimnout, že u některých výsledků utkání jsou body vítěze totožné. Je to dáno tím, že do funkce h vstupují stejné poměry. Při výhře 1:0 vítězný tým obdrží 0,7887 bodu. Podívejme se, pokud by tým už v zápase nějaké góly obdržel, kolikrát by musel celkově skórovat, aby si odnesl stejný bodový zisk jako při výhře 1:0.

Pro jednoduchost označme počet vstřelených branek vítězného týmu a, počet branek soupeře b. Při výhře 1:0 je poměr roven 2/3. Proto můžeme psát

$$\frac{a+1}{a+b+2} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = 2b+1.$$



Obrázek 5.4. Graf funkce h (tmavě šedá) a funkce $y = x$.

Výsledek utkání	body vítěze	body poraženého
remíza	0.5	0.5
1:0	0,7887	0,2113
2:0	0,8536	0,1127
3:0	0,8873	0,1127
2:1	0,7236	0,2734
3:1	0,7887	0,2113
5:3	0,7236	0,2764

Tabulka 5.1. Nelineární rozdělení bodu při různých výsledcích.

Z tohoto vztahu tedy vyplývá, že pokud si chceme odnést 0,7887 bodu a už jsme branku inkasovali, musíme vstřelit tři. Pokud jsme dostali dvě, tak musíme skórovat pětkrát, atd. Pro jiné typy výsledů bychom uvažovali podobně.

5.3. Nelineární rozšíření Keenerovy metody

Metoda výpočtu relativní síly týmů, uvedená v předcházejících sekcích, je matematicky opodstatněná. V některých případech se ale může projevit její slabina ve smyslu zvýhodňování týmů s těžšími soupeři v rozpisu zápasů, a může vyvolat nespokojenost mezi fanoušky, kteří si myslí, že právě jejich tým byl znevýhodněn.

Pokud hrají všichni proti všem stejný počet zápasů, nebo se alespoň blíží podobnému počtu utkání, k této sitaci nedojde. Týmy ale mohou být rozděleny například do několika divizí (skupin), a hrát převážně s týmy z té své. Pokud ovšem bude nějaký tým ve slabé skupině, nemůže nikdy dosáhnout velkého množství bodů, i kdyby vyhrál prakticky všechny své zápasy, protože většina soupeřů má nízkou relativní sílu. Existuje několik způsobů, jak tento problém diskutovat.

Hlavní myšlenka našich úvah spočívá ve vyjádření relativní síly r_i každého týmu ve tvaru

$$r_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n} f(p_{ij} r_j), \tag{5.9}$$

kde r_j je relativní síla soupeřů a p_{ij} značí kladné číslo charakterizující výsledek utkání mezi týmy i a j. O funkci f zde budeme předpokládat, že je spojitá a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$. Navíc požadujeme, aby tato funkce splňovala

$$f(0) > 0, \qquad f(\infty) = 1.$$

Z uvedených podmínek vyplývá, že silné týmy si nebudou moci jednoznačným vítězstvím zvyšovat tak rychle svůj bodový stav, a zároveň týmy, které mají nalosované slabší soupeře, mohou stále dosáhnout na slušný celkový bodový zisk.

Vektor relativní síly $\boldsymbol{r}$ ale jednoduše dosazením do funkce nespočítáme, protože v argumentu funkce f jsou zastoupeny právě jeho složky. Naším úkolem je tedy opět nalézt kladný vektor relativní síly týmů, nyní ale odlišnou cestou než v předchozích částech.

Definujme nelineární funkci $\boldsymbol{F}$ argumentu $\boldsymbol{r}$, která má složky ve tvaru

$$F_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n} f(p_{ij} r_j).$$

Všimněme si, že pravá strana předchozího vztahu je totožná s pravou stranou v rovnici (5.9), kterou lze tedy psát ve tvaru

$$r_i = F_i(\boldsymbol{r}),$$

nebo-li vektorově

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).$$

O nelineární funkci $\boldsymbol{F}$ můžeme konstatovat, že se jedná o zobrazení z R_+^n do R_+^n. Zobrazení $\boldsymbol{F}$ je také omezené, neboť sčítáme konečný počet čísel, jejichž hodnota je mezi nulou a jedničkou, a následně součet jen vydělíme počtem zápasů. Pokud navíc budeme požadovat, aby funkce f splňovala, pro všechna nezáporná x, vztah

$$f(tx) > t f(x) \quad \text{pro všechna } t \in (0, 1),$$

pak v R_+^n existuje jediný pevný bod tohoto zobrazení $\boldsymbol{F}$, který získáme pomocí vztahu

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{r_0}) = \boldsymbol{r}$$

s libovolným kladným startovacím vektorem $\boldsymbol{r_0}$. Symbolem $\boldsymbol{F}^n$ přitom rozumíme n-tou iteraci zobrazení $\boldsymbol{F}$ (podrobnější komentáře k této proceduře lze nalézt v [1]).

Jinou interpretací výše popsaného postupu je, že řešíme nelineární problém vlastních čísel, kde se opět snažíme najít vlastní vektor $\boldsymbol{r}$ s kladnými složkami.

Celý tento přístup může tedy být chápán jako *nelineární zobecnění Perronovy-Frobeniovy věty.*

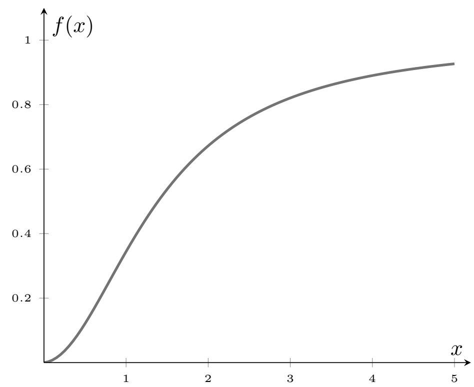
Po řadě exprerimentů (viz [1]) byla vybrána funkce

$$f(x) = \frac{0.05x + x^2}{2 + 0.05x + x^2}$$

a tvar zohledňující výsledek zápasu

$$p_{ij} = \frac{5 + G_{ij} + G_{ij}^{2/3}}{5 + G_{ji} + Gij^{2/3}}.$$

Graf funkce f je zobrazen v obrázku 5.5. Všimněme si, že pokud počet vstřelených gólů obou týmů je stejný, tak $p_{ij} = 1$ a každý tým opět získá půl bodu. Jistým



Obrázek 5.5. Graf funkce $f(x)$.

paradoxem této volby je, že zvolená funkce f nesplňuje některé z výše uvedených podmínek (resp. tyto podmínky „téměř“ splňuje). Ukazuje se však, že metoda postupných aproximací i přesto konverguje k hledanému vektoru $\boldsymbol{r}$.

6. Aplikace

V této kapitole si ukážeme použití rankingových a bodovacích systémů uvedených v sekci 5.2, a to na skutečných sportovních soutěžích týmů. Získané výsledky poté porovnáme s oficiálním pořadím. Nejprve se zaměříme na britskou fotbalovou Premier League, následně na zámořskou NHL, která je mnohými považována za nejlepší hokejovou ligu světa. Kapitolu zakončíme aplikací rankingových metod na ligu amerického fotbalu NFL.

Výběr jednotlivých soutěží, ani jejich uspořádání, není náhodný. Zvolili jsme je tak, aby nám ilustrovaly výsledky rankingových metod na různých herních systémech. Postupně si projdeme soutěže od téměř „ideálního“ rozlosování (ve smyslu, že se týmy mezi sebou utkají rovnoměrně), až po situaci, kdy se v základní části některé týmy nestřetnou vůbec.

Premier League, konkrétně sezónu 2015/2016, jsme vybrali, kromě toho, že týmy proti sobě odehrají stejný počet zápasů, také z důvodu, že zmíněný ročník vyhrál tým s jednou s nejmenších šancí na úspěch (podle sázkových kanceláří 5000-1). Proto bude zajímavé ověřit, jestli by tentýž tým vyhrál i v případě, že by k určení pořadí na konci ročníku byly použity námi zmíněné rankingové metody.

Hokejovou soutěž NHL jsme zvolili primárně ze dvou důvodů. Jedním z nich je ten, že se všechny týmy spolu utkají, ale neodehrají proti sobě stejný počet utkání. Druhým důvodem je vysoký počet celkově odehraných zápasů, který by měl zaručit, že výsledné seřazení se více blíží skutečné výkonnosti jednotlivých týmů.

V lize amerického fotbalu NFL se všechny týmy během základní části spolu neutkají, každý tým se utká přibližně pouze s polovinou. Jednotlivé celky odehrají pouze sedmnáct zápasů, bude tedy napínavé sledovat, jak významně se pořadí změní.

6.1. Premier League 2015/2016

Premier League se účastní dvacet týmů z různých koutů Anglie, případně Walesu. Sezóna začíná v srpnu a každý tým hraje vždy proti ostatním týmům jeden zápas na domácím hřišti a jeden u protivníka. V květnu na konci sezóny má tedy každý tým na svém kontě třicet osm odehraných zápasů.

Zápas může pro každý z týmů dopadnout pouze třemi způsoby – výhrou, remízou a prohrou. Za vítězství celek obdrží tři body, za prohru žádný. V případě remízy si oba týmy odnesou po jednom bodě. Průběžné i závěrečné pořadí je pak sestaveno na základě zmíněných bodových zisků. Pokud nastane shoda, je rozhodujícím faktorem např. rozdíl vstřelených a obdržených branek, nebo výsledek vzájemných zápasů.

Vítězem celé soutěže se stává tým s největším celkovým bodovým ziskem. Takto sestavené pořadí rozhoduje i o dalších věcech. Poslední tři celky, tzn. na osmnáctém až dvacátém místě, opouští ligu minimálně na jeden rok a sestupují do druhé nejvyšší ligy s názvem Championship. Naopak první čtyři týmy se kvalifikují do prestižní Ligy mistrů a určitý počet týmů od pátého místa níže pak do Evropské, nebo Konferenční ligy.

6.1.1. Absolutní senzace. Sezóna Premier League 2015/2016 nabídla neuvěřitelnou podívanou a uchvátila celý fotbalový svět. Malý klub Leicester City, který se v přechozím ročníku jen stěží v soutěži zachránil, opanoval celou ligu naprosto suverénním způsobem, a zajistil si tak místo mezi největšími senzacemi v historii fotbalu i sportu obecně.

Bylo by tedy zajímavé ověřit, jestli tým z Leicestru porážel i velmi silné protivníky, nebo jestli jen využil klopýtnutí největších favoritů s celky ze spodní části tabulky. To se nám částečně podaří díky tomu, že v systémech hodnocení zohledňujeme i sílu jednotlivých týmů.

6.1.2. Sestavení pořadí. Pro sestavení pořadí použijeme Keenerovu metodu. Nejprve s bodovými zisky, které jsou užívány v této soutěži a výše jsme je uvedli.

Příslušnou hodnotící matici označíme A. Následně použijeme spojité, nelineární bodové ohodnocení jednotlivých zápasů, které je dáno vztahy (5.7) a (5.8), a jehož základem jsou vstřelené góly. Odpovídající hodnotící matici označíme B. Pro názornost si uveďme, jak vypadá matice A. Druhou matici uvádět nebudeme, protože obsahuje některá čísla s velmi dlouhým desetiným zápisem, a matice by byla tedy velmi nepřehledná. Hodnotící matice A je tvaru

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 6 & 6 & 0 & 4 & 6 & 6 & 2 & 4 & 3 & 6 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 6 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 2 & 4 & 3 \\
6 & 6 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\
1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 6 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\
0 & 6 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\
0 & 4 & 2 & 4 & 6 & 6 & 0 & 3 & 4 & 2 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 4 & 4 \\
2 & 6 & 6 & 4 & 3 & 4 & 3 & 0 & 6 & 0 & 1 & 4 & 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\
1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 & 4 & 0 & 6 & 6 & 1 \\
3 & 6 & 3 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 6 & 0 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 2 \\
4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 6 & 3 & 4 & 4 & 3 \\
1 & 6 & 6 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\
1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\
2 & 6 & 6 & 2 & 6 & 2 & 1 & 2 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 4 & 6 & 4 & 0 & 6 & 2 & 3 \\
0 & 6 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 4 & 3 \\
3 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 6 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 1 & 6 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix}.$$

Obě hodnotící matice jsou ireducibilní, takže podle Perronovy-Frobeniovy věty existuje pro matice Perronovův vektor. Výsledné vektory, vypočtené normalizovanou mocninnou metodou v Matlabu při zvolené přesnosti $\epsilon = 10^{-6}$, jsou reprezentovány v tabulce 6.1.

Z tabulky můžeme vidět, že by Leicester City vyhrál i v případě, kdybychom pro určení pořadí použili tyto rankingové systémy. Z hodnoty Perronova vektoru při použití turnajové matice A plyne, že Leicester porážel opravdu i silné týmy a titul si zaslouží. Z použití matice B plyne zase to, že nevyhrával většinou těsně o jeden gól, ale větším brankovým rozdílem.

Do Ligy mistrů by se vždy kvalifikovaly týmy Leicester, Arsenal a Tottenham. Jednou by byly doplněny Manchesterem United, podruhé West Hamem United. Ligu by pokaždé opustily dva stejné týmy - Norwich a Aston Villa. Při užití metody se standartním ohodnocením zápasů by se k nim připojil Sunderland a sestupu by se tudíž vyhnul Newcastle. Naopak pokud aplikujeme nelineární ohodnocení, Newcastle by už sestupu neunikl. Z toho můžeme dedukovat, že porážel silnější týmy než jeho konkurenti v boji o záchranu, ale malým gólovým rozdílem.

NÁZEV TÝMU	POŘ. STŽ.	KEE OB	RA	KEE NEL	RB
Leicester City	1	1	0,3366	1	0,2867
Arsenal	2	2	0,2969	3	0.2695
Tottenham Hotspur	3	3	0,2878	2	0,2701
Manchester City	4	7	0,2563	6	0,2537
Manchester United	5	4	0,2805	5	0,2539
Southampton	6	6	0,2739	7	0,2486
West Ham United	7	5	0,2754	4	0,2543
Liverpool	8	8	0,2474	8	0,2397
Stoke City	9	9	0,2126	11	0,2089
Chelsea	10	10	0,2068	9	0,2240
Everton	11	13	0,1812	10	0,2145
Swansea City	12	11	0,1947	12	0,2084
Watford	13	17	0,1686	14	0,1981
West Bromwich Albion	14	12	0.,831	13	0,2028
Crystal Palace	15	15	0,1708	15	0,1947
Bournemouth	16	14	0,1759	17	0,1900
Sunderland	17	18	0,1558	16	0,1904
Newcastle United	18	16	0,1692	18	0,1887
Norwich City	19	19	0,1438	19	0,1743
Aston Villa	20	20	0,0700	20	0,1403

Tabulka 6.1. Porovnání oficiálních výsledků s Keenerovou metodou. Významy jednotlivých zkratek: KEENER OB - pořadí určené Keenerovou metodou při ponechání oficiálního bodování; RA - složky Perronova vektoru patřící k KEENER OB; KEENER NEL - pořadí určené při nelineárním rozdělení bodu; RB - složky Perronova vektoru patřící k KEENER NEL.

Všimněme si, že mezi oficiálním pořadím a dvěma dalšími, které jsme získali Keenerovou metodou, nejsou velké rozdíly. Proto můžeme konstatovat, že na turnaje, kde týmy spolu navzájem hrají stejný počet zápasů, není nutné aplikovat metody uvedené v tomto článku.

6.2. NHL 2021/2022

Hokejové ligy se od roku 2021 účastní třicet dva týmů z USA a Kanady, které jsou rozděleny do Západní a Východní konference. Každá je ještě poté rozdělena do dvou divizí po osmi týmech, viz tabulku 6.2.

Rozdělení týmů NHL			
Západní konference		Východní konference	
Pacifická divize	Centrální divize	Atlantická divize	Metropolitní divize
Anaheim Ducks	Arizona Coyotes	Boston Bruins	Carolina Hurricanes
Calgary Flames	Chicago Blackhawks	Buffalo Sabres	Clmbs Blue Jackets
Edmonton Oilers	Colorado Avalanche	Detroit Red Wings	New Jersey Devils
Los Angeles Kings	Dallas Stars	Florida Panthers	New York Islanders
San Jose Sharks	Minnesota Wild	Montreal Canadiens	New York Rangers
Seattle Kraken	Nashville Predators	Ottawa Senators	Philadelphia Flyers
Vancouver Canucks	St. Louis Blues	TampaBay Lightning	Pittsburgh Penguins
Vegas Gold. Knights	Winnipeg Jets	Toronto Maple Leafs	Washington Capitals

Tabulka 6.2. Rozdělení týmů NHL.

Týmy v rámci jedné divize proti sobě hrají během základní části třikrát až čtyřikrát (celkem dvacet šet zápasů). Proti soupeřům z druhé divize stejné konference se utkají třikrát (24 zápasů). S protivníky z opačné konference se potkají dvakrát. Celkově odehraje každý tým během základní části osmdesát dva zápasů. Dohromady je všech zápasů v základní části 1312.

Oficiální bodování výsledků utkání je jednoduché, a týmy si mohou odnést od nuly do tří bodů. V případě výhry v základní hrací době tým získává tři body. Pokud zápas dospěje do prodloužení, nebo dokonce do samostatných nájezdů, a tým v nich uspěje, odnese si dva body. Pokud ale prodloužení nezvládne, připíše si pouze jeden bod. Za prohru v základní hrací době se týmu nepřipíše nic.

Na konci základní části se podle počtu bodů sestavuje více pořadí – celkové, v rámci konferencí a divizí. Tým s největším počtem bodů z celé soutěže se raduje ze zisku Prezidentského poháru. Možná důležitější pořadí je to, které určuje, kdo se kvalifikuje do play-off a zahraje si o Stanley Cup. Do vyřazovací fáze postupují z každé divize tři nejlepší týmy. Následně ze zbývajících celků z každé konference postupují ještě dva týmy s největším počtem bodů na tzv. divokou kartu.

Zjistěme, jak se změní účastníci play-off při použití Keenerovy metody, pokud zachováme bodové ohodnocení výsledků jednotlivých zápasů. Například jestli Colorado Avalanche, které v tomto ročníku Stanley Cup vyhrálo, se do play-off kvalifikuje.

6.2.1. Sestavení pořadí. Hodnotící matici řádu $n = 32$ zde uvádět nebudeme, pouze si ověříme, že předpoklady Perronovy-Frobeniovy věty platí. Hodnotící matice, z definice splňující nezápornost, je ireducibilní. Perronův vektor síly týmů tedy existuje. Pro zajímavost, hodnotící matice má dominantní vlastní číslo s přibližnou hodnotou $\lambda = 116{,}13$. Jedná se tedy dokonce o primitivní matici (viz definici 3.4). Jednotlivé složky Perronova vektoru, vypočítané znovu pomocí Matlabu při zvolené přesnosti $\epsilon = 10^{-6}$, budou uvedeny v tabulkách jednotlivých divizí.

NÁZEV	PK	RANK	PS	PB	Δ
Calgary	1	0.2154	1	111	0
Edmon.	2	0.2007	2	104	0
Vegas	3	0.1815	4	94	-1
Kings	4	0.1801	3	99	1
Vanco.	5	0.1720	5	92	0
San Jose	6	0.1373	6	77	0
Anaheim	7	0.1318	7	76	0
Seattle	8	0.1162	8	60	0

Tabulka 6.3. Pořadí Pacifické divize.

NÁZEV	PK	RANK	PS	PB	Δ
Colorado	1	0.2327	1	119	0
St. Louis	2	0.2152	2	109	0
Minne.	3	0.2115	3	113	0
Nashville	4	0.1864	4	97	0
Dallas	5	0.1836	5	98	0
Winnipeg	6	0.1696	6	89	0
Chicago	7	0.1114	7	68	0
Arizona	8	0.1041	8	57	0

Tabulka 6.4. Pořadí Centrální divize.

NÁZEV	PK	RANK	PS	PB	Δ
Florida	1	0.2300	1	122	0
Toronto	2	0.2272	2	115	0
Tampa	3	0.2065	3	110	0
Boston	4	0.1996	4	107	0
Ottawa	5	0.1469	7	73	-2
Buffalo	6	0.1408	5	75	1
Detroit	7	0.1320	6	74	1
Montr.	8	0.1067	8	55	0

Tabulka 6.5. Pořadí Atlantické divize.

NÁZEV	PK	RANK	PS	PB	Δ
Hurric.	1	0.2315	1	116	0
NY Rang.	2	0.2111	2	110	0
Pittsb.	3	0.1940	3	103	0
Capitals	4	0.1904	4	100	0
NY Isl.	5	0.1561	5	84	0
Columbus	6	0.1473	6	81	0
New Jer.	7	0.1193	7	63	0
Flyers	8	0.1158	8	61	0

Tabulka 6.6. Pořadí Metropolitní divize.

Významy jednotlivých zkratek a barev: NÁZEV - název týmu; PK - pořadí určené Keenerovou metodou; RANK - vypočtený ranking; tedy jednotlivé složky Perronova vektoru; PS - pořadí v soutěži; PB - počet bodů; Δ - rozdíl oproti ligou uznávanému pořadí (PK - PS), mínus značí posun směrem nahoru; světle šedá barva - postup do play-off.

Kdo čekal nějaké turbuletní změny v pořadí, musí být zklamán. Pořadí týmů v jednotlivých divizích se prakticky vůbec nezměnilo. Přesto, do boje o Stanley Cup nepůjdou stejné týmy. Z Pacifické divize se kvalifikoval tým z Las Vegas na úkor Kings z Los Angelos. Změnil se také vítěz celé základní části. Floridu Panthers vystřídalo Colorado Avalanche. Otázka, jestli se Colorado vůbec dostane do play-off, je tedy zodpovězena a to jasně. Dostane.

Před vyslovením závěru, se nejprve podívejme na závěrečné pořadí celé ligy v tabulce 6.7.

Všimněme si, že pořadí se v rámci celé soutěže měnilo, a i když posuny nebyly výrazné, tak jich bylo hodně. Navíc je patrné, že tabulka se nám rozdělila do přibližně tří bloků (první, druhá a třetí desítka) a jen v rámci nich dochází k

NÁZEV TÝMU	POŘADÍ KEENER	RANKING	POŘADÍ SOUTĚŽE	POČET B.	Δ
Colorado	1	0,2327	2	119	-1
Hurricanes	2	0,2315	3	116	-1
Florida	3	0,2300	1	122	2
Toronto	4	0,2272	4	115	0
Calgary	5	0,2154	6	111	-1
St, Louis	6	0,2152	9	109	-3
Minnesota	7	0,2115	5	113	2
NY Rangers	8	0,2111	7	110	1
Tampa	9	0,2065	8	110	1
Edmonton	10	0,2007	11	104	-1
Boston	11	0,1996	10	107	1
Pittsburgh	12	0,1940	12	103	0
Capitals	13	0,1904	13	100	0
Nashville	14	0,1864	16	97	-2
Dallas	15	0,1836	15	98	0
Vegas	16	0,1815	17	94	-1
Kings	17	0,1801	14	99	3
Vancouver	18	0,1720	18	92	0
Winnipeg	19	0,1696	19	89	0
NY Islanders	20	0,1561	20	84	0
Columbus	21	0,1473	21	81	0
Ottawa	22	0,1469	26	73	-4
Buffalo	23	0,1408	24	75	-1
San Jose	24	0,1373	22	77	2
Detroit	25	0,1320	25	74	0
Anaheim	26	0,1318	23	76	3
New Jersey	27	0,1193	28	63	-1
Seattle	28	0,1162	30	60	-2
Flyers	29	0,1158	29	61	0
Chicago	30	0,1114	27	68	3
Montreal	31	0,1067	32	55	-1
Arizona	32	0,1041	31	57	1

Tabulka 6.7. Pořadí týmů NHL podle Keenerovy metody.

výměně. Tým, který si nejvíce polepšil je Ottawa, která se umístila o čtyři pozice lépe, než v původním pořadí. Znamená to, že porazila i silnější celky. Naopak týmy, které si nejvíce pohoršily, jsou Chicago, Kings a Anaheim.

Celý příklad, i když to tak na první pohled nevypadá, nám dává zajímavý výsledek. Čím více zápasů týmy odehrají, tím více se mezi nimi projeví skutečná kvalita jednotlivých mužstev. Z výsledků také plyne, že divize jsou celkem dobře rozdělené. V každé jsou velmi silné i slabé týmy. Proto „síla“ aplikaného rankingového systému není tolik vidět.

Závěrem by se dalo konstatovat, že vliv Keenerovy rankingové metody je v případě NHL oproti Premier League větší, avšak je hodně neutralizován zmíněným vysokým počtem odehraných zápasů.

6.3. NFL 2022

Liga amerického fotbalu NFL je složena z třiceti dvou mužstev výhradně z USA. Formát ligy je velice podobný NHL, kde se po základní části hraje play-off. Týmy jsou rozděleny do dvou konferencí, které se ještě dělí na celkem osm divizí.

Výsledky zápasů jsou bodovány jednoduše. Za výhru si tým připíše jeden bod, za remízu půl bodu a za prohru žádný. Při sestavení závěrečného pořadí se body pouze sečtou a vydělí počtem zápasu. Připomeňme, že takovéto hodnocení jsme uváděli v minulé kapitole v části 5.2.2 o volbě koeficientů hodnotící matice. Pokud bychom tento tvar vynásobili sto procenty, dostali bychom již zmiňovaný „winning percentage", nebo-li procento vyhraných zápasů.

V základní části každý tým odehraje pouze sedmnáct utkání během osmnácti týdnů. Poté jsou týmy seřazeny v příslušných divizích a z každé přímo postupuje pouze vítěz. Vítězné týmy jsou následně doplněny celky, stejně jako v případě NHL na tzv. divokou kartu, třemi nejlepšími týmy ze zbylých týmů každé konference.

6.3.1. Sestavení pořadí. V tomto případě se avšak nebudeme zabývat otázkou, kdo by se kvalifikoval do play-off přímo, nebo na divokou kartu. Zaměříme se na celkové pořadí soutěže, jeho změnu a následné srovnání při použití Keenerovy metody s nezměněným bodováním soutěže. Budeme tedy nyní taky uvažovat hodnocení, kde tým získá jeden bod, půl bodu, nebo žádný.

Nejprve musíme opět ověřit, jestli hledaný Perronův vektor, při takto zvoleném bodování zápasů, existuje. Hodnotí matice je i v tomto případě ireducibilní, a podmínky pro existenci Perronova vektoru jsou splněny. Díky tomu, že vlastní číslo (příslušné hledanému vlastnímu vektoru) je zároveň i dominatním vlastním číslem o přibližné hodnotě $\lambda = 7{,}3015$, můžeme použít na výpočet hledaného Perronova vektoru normalizovanou mocninnou metodu. Přesnost ponecháme nezměněnou, tedy $\epsilon = 10^{-6}$, a dostáváme tabulku 6.8.

Hned na první pohled je patrné, že došlo k velkému pohybu týmů vrámci umístění v tabulce. Je to hlavně dáno z toho důvodu, že týmy hrály jen proti některým celkům a každá výhra nebo remíza měla stejnou váhu. My jsme ale pomocí rankingového systému zohlednili i výkonnost jednotlivých protivníků. S takovýmto pořadím by určitě byly spokojeny týmy Buffalo Bills, kteří by základní část vyhráli nebo Washington Commanders, kteří se posunuli na dvanáctou příčku (v tabulce světle šedá). Výsledky však nejsou „ideální". V sekci 5.2 jsme se zmínili o tom, že pokud bude mít tým nalosované slabší soupeře, může se díky tomu propadnout v pořadí, které bylo získano Keenerovou metodou. Jasnou ukázkou této nevýhody je tým Kansas City Chiefs (sytě šedá), který obsadil až sedmou pozici i přesto, že v původním pořadí byl nejlepší.

Tato metoda je velmi účinný nástroj, a pokud zajistíme, že týmy budou mít podobně náročný rozpis zápasů, pak výsledky, které dostaneme, budou velmi přesné.

NÁZEV TÝMU	POŘADÍ KEENER	RANKING	POŘADÍ	WP	Δ
Buffalo Bills	1	0,3028	3	0,813	-2
Cincinnati Bengals	2	0,2881	6	0,750	-4
Philadelphia Eagles	3	0,2879	2	0,824	1
Minnesota Vikings	4	0,2643	4	0,765	0
Dallas Cowboys	5	0,2608	7	0,706	-2
Baltimore Ravens	6	0,2174	8	0,588	-2
Kansas City Chiefs	7	0,2156	1	0,824	6
San Francisco 49ers	8	0,2121	5	0,765	3
Miami Dolphins	9	0,2055	11	0,529	-2
Detroit Lions	10	0,1902	14	0,529	-4
Pittsburgh Steelers	11	0,1884	12	0,529	-1
Washington Commanders	12	0,1756	16	0,500	-4
New York Giants	13	0,1694	10	0,559	3
Green Bay Packers	14	0,1678	18	0,471	-4
New England Patriots	15	0,1654	17	0,471	-2
Jacksonville Jaguars	16	0,1651	13	0,529	3
Cleveland Browns	17	0,1639	21	0,412	-4
New York Jets	18	0,1607	20	0,412	-2
Tampa Bay Buccaneers	19	0,1438	19	0,471	0
Los Angeles Chargers	20	0,1411	9	0,588	11
Seattle Seahawks	21	0,1368	15	0,529	6
New Orleans Saints	22	0,1363	25	0,412	-3
Carolina Panthers	23	0,1306	24	0,412	-1
Atlanta Falcons	24	0,1239	23	0,412	1
Tennessee Titans	25	0,1006	22	0,412	3
Las Vegas Raiders	26	0,0916	26	0,353	0
Denver Broncos	27	0,0862	27	0,294	0
Indianapolis Colts	28	0,0801	29	0,265	-1
Los Angeles Rams	29	0,0672	28	0,294	1
Chicago Bears	30	0,0590	32	0,176	-2
Arizona Cardinals	31	0,0583	30	0,235	1
Houston Texans	32	0,0528	31	0,206	1

Tabulka 6.8. Srovnání Keenerovy metody s oficiálním pořadím soutěže NFL. Zkratka: WP - winning percentange bez vynásobení sto procenty..

V opačném případě se nám může stát, že budeme moci zpozorovat abnormality jako v tomto případě.

7. Porovnání s vybranými metodami používanými v šachu

V této kapitole porovnáme výše uvedené metody s metodami Buchholzovou a Sonnebornovou-Bergerovou, které jsou využívány k stanovení pořadí v šachových turnajích.

7.1. Buchholzova metoda

Tato metoda se používá jako pomocné hodnocení pro turnaje hrané švýcarským[3] systémem. Kromě šachu se tedy také uplatňuje v petanque atd. Slouží k určení pořadí účastníků turnaje při shodě bodů a upřednostňuje hráče, kteří měli silnější protivníky.

Bodování jednotlivých zápasů je zde běžné – hráč, pokud vyhrál, získá jeden bod, pokud remizoval, přičte si půl bodu. V případě prohry si nepřipisuje nic. Celkový bodový zisk každého hráče je dán součtem získaných bodů. V případě shody se hráčům přiřadí nové skóre, které je definováno pouze jako suma celkového zisku bodů jednotlivých soupeřů. Nezáleží, jestli hráč soupeře porazil, nebo proti němu prohrál. Zde se tento způsob velmi liší od námi uvedených systémů.

Pro získání nového skóre – Buchholzova skóre – bychom museli změnit hodnotící matici, která by měla jedničku v prvcích a_{ij} a a_{ji}, pokud proti sobě účastníci i a j hráli. V opačném případě by na těchto pozicích byla nula. A to je v rozporu s našimi metodami, ve kterých používáme pouze jednu hodnotící matici.

7.2. Sonnebornova-Bergerova metoda

Více podobná námi zkoumaným metodám je Sonnebornova-Bergerova metoda. Znovu se používá pouze jako pomocná metoda při shodě bodů, nyní ale v šachových turnajích, kde každý hraje s každým právě jednou.

Všechna střetnutí bodujeme takto: výhru jedním bodem, remízu polovinou a prohru žádným. Výsledný bodový zisk každého hráče je pouhý součet bodů získaných z jednotlivých utkání a podle těchto zisků je sestaveno závěrečné pořadí. Bodový zisk b_i i-tého účastníka zapíšeme takovýmto způsobem:

$$b_i = W_i + \frac{1}{2}R_i + 0P_i,$$

kde písmeno W_i značí počet výher, R_i počet remíz a P_i počet proher i-tého účastníka.

Díky využití hodnotící matice A, kde, jak víme, prvek a_{ij} značí bodový zisk šachisty i proti j, můžeme tuto operaci pro všechny hráče zapsat maticově

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{e},$$

kde $\boldsymbol{e}$ je vektor jedniček.

[3]Hlavní myšlenka švýcarského systému je v tom, aby proti sobě v každém kole hráli hráči s co nejpodobnější úrovní a zároveň aby proti sobě nehráli vícekrát.

Pokud nastane situace, ve které má více hráčů stejný celkový bodový zisk, pokračujeme následovně. Vytvoříme nový druhý bodový zisk $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{\beta}}$, kde i-tému účastníkovi za každého protivníka, kterého porazil, přičteme soupeřův celkový počet bodů, a za každého soupeře, se kterým remizoval, polovinu jeho celkových bodů z turnaje. Za soupeře, s nimž prohrál, se mu nepřičte nic.

Díky vhodně zvolenému rozdělení bodu za zápas (jeden bod, polovina, nebo žádný) můžeme nový bodový zisk napsat maticově:

$$\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{\beta}} = A\boldsymbol{b} = AA\boldsymbol{e} = A^2\boldsymbol{e}.$$

Všimněme si, že se nejedná o nic jiného než pouze o druhou iteraci Keenerovy metody, pokud za startovací vektor zvolíme $\boldsymbol{e}$. (Také nedělíme počtem utkání – z důvodu stejného počtu zápasů to není pro druhou iteraci nutné.)

Porovnání těchto dvou metod si ukážeme na reálném příkladu a výsledky poté okomentujeme.

JMÉNO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sloth	0	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	1	0,5	1	1	1	1
Zagarovsky	0,5	0	0	0,5	1	0,5	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1
Kosenkov	0,5	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	1	1	1	1
Khasin	0	0,5	0,5	0	0,5	1	0,5	0	1	1	0,5	1	0,5	1	0,5
Kletsel	0,5	0	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0	1	1	0,5	1	1
De Carbonnel	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0	0,5	0,5	0	1	0,5	0,5	0	1	1
Arnlind	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	1	0	0,5	0,5	1	1	0,5
Dunhaupt	0	0	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0	0	0,5	1	0	1	0,5	1
Maedler	0,5	0	0	0	0,5	1	0	1	0	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1
Estrin	0	0,5	0	0	1	0	1	0,5	0	0	1	1	1	0	1
Walther	0,5	0	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0	0,5	0	0	0	1	0,5	1
Boey	0	0	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0	1	0	0,5	0,5	1
Abramov	0	0	0	0,5	0,5	1	0	0	0,5	0	0	0,5	0	0,5	1
Siklos	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0	1
Nun	0	0	0	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabulka 7.1. Bodové zisky hráčů z jednotlivých utkání z následujícího šachového turnaje.

Příklad 7.1. Sestavme pořadí účastníků turnaje 8. finále mistrovství světa v korespondenčním šachu. V případě shody bodů použijme metody B-S a Keenerovu, a jejich výsledky porovnejme. Bodové zisky hráčů z jednotlivých utkání jsou zapsány v tabulce 7.1, které přepíšeme do hodnotící matice A a pořadí řádků ponecháme. Vektor s celkovým počtem bodů jednotlivých hráčů poté vyjde následovně:

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 10{,}5 & 8.5 & 8 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 5.5 & 5.5 & 4.5 & 4.5 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Je patrné, že několik šachistů má stejný bodový zisk, na určení jednoznačného pořadí proto použijeme pomocné metody. Nejprve si však musíme ověřit existenci Perronova vektoru. Hodnotící matice A z tohoto příkladu je ireducibilní a už z definice nezáporná, Perronův vektor síly týmů tedy existuje. Jednotlivé metody nyní už jen vypočítáme a jednotlivé složky získaných vektorů zapíšeme do tabulky 7.2.

Z výsledků je vidět, že při použití Keenerovy metody došlo oproti Sonnebornově-Bergerově metodě k prohození Arnlinda a Dunhaupta. Je to z toho důvodu, že

Dunhaupt získal více bodů proti lépe postaveným hráčům v závěrečném pořadí a až při vyšší mocnině u hodnotící matice se tato skutečnost projevila.

JMÉNO	CELKEM	PT	SB RANK	PSB	KNR RANK	PK	Δ
Sloth	11	1	69.5000	1	0,3929	1	0
Zagarovsky	11	1	66.7500	2	0,3765	2	0
Kosenkov	10,5	3	67.5000	3	0,3795	3	0
Khasin	8.5	4	54.7500	4	0,3068	4	0
Kletsel	8	5	47.7500	5	0,2719	5	0
De Carbonnel	7	6	45.2500	6	0,2557	6	0
Arnlind	7	6	42.5000	7	0,2398	8	1
Dunhaupt	7	6	41.5000	8	0,2406	7	-1
Maedler	7	6	41.5000	9	0,2366	9	0
Estrin	7	6	40,5000	10	0,2282	10	0
Walther	5.5	11	33.2500	11	0,1934	11	0
Boey	5.5	11	28.5000	12	0,1638	12	0
Abramov	4.5	13	24.7500	13	0,1428	13	0
Siklos	4.5	13	22.7500	14	0,1274	14	0
Nun	1	15	7.7500	15	0,0457	15	0

Tabulka 7.2. Výsledné pořadí šachového turnaje určené dvěma metodami.

V předchozích kapitolách jsme uváděli, že čím vyšší je mocnina u hodnotící matice, tím by výsledky měli být přesnější – s rostoucí mocninou se více projeví jednotlivé závislosti mezi účastníky – a příklad z šachového turnaje nám tento fakt jen znovu potvrdil. Bylo by tedy vhodné pro dosažení přesnějších výsledků místo Sonnebornovy-Bergerovy metody zvolit Keenerovu.

8. Závěr

Cílem článku a bakalářské práce, ze které tento článek vychází, bylo vysvětlit význam Perronovy-Frobeniovy věty a dalších důležitých teoretických výsledků v některých rankingových systémech.

Po uvedení základních pojmů z teorie matic jsme se detailněji zaměřili na zmiňovanou Perronovu-Frobeniovu větu, která udává podmínky, za kterých existuje kladný vlastní vektor příslušný kladnému vlastnímu číslu o velikosti spektrálního poloměru. Tuto problematiku jsme ilustrovali na motivačním příkladu matice druhého řádu. Nastínili jsme také numerický výpočet aproximace vlastního vektoru, příslušného dominantnímu vlastnímu číslu, a to pomocí normalizované mocninné metody.

V čtvrté kapitole jsme ukázali možný maticový zápis turnajové tabulky pomocí hodnotící a turnajové matice. Turnajovou matici jsme dále podrobně rozebrali a uvedli její zajímavé vlastnosti.

První sekce páté kapitoly byla věnována sestavení pořadí pomocí turnajové matice. Zjistili jsme, že pokud je matice ireducibilní, týmy nejsme schopni podle počtu vítězství seřadit, a tato situace vede na použití Perronovy-Frobeniovy věty. Aplikaci jsme ilustrovali na dvou jednoduchých příkladech. Z nich vyplývá, že i když nám většinou použití této věty pro určení pořadí v rámci ireducibilní matice nebo ireducibilním bloku pomůže, existují i takové situace, ve kterých bez zohlednění dalších faktorů pořadí neurčíme.

Druhá sekce kapitoly páté se zabývala hledáním vhodného rankingu, který by zohledňoval nejen výsledek utkání a schopnosti protivníka, ale také nerovnoměrný počet zápasů odehraný mezi jednotlivými soupeři. Odvodili jsme tzv. Keenerovu metodu, která vede znovu na použití Perronovy-Frobeniovy věty. Následně jsme také uvedli možné alternativní rozdělení bodů, tedy možnou volbu koeficientů hodnotící matice, a popsali jejich přednosti a nevýhody.

V poslední sekci páté kapitoly jsme naznačili myšlenku nelineárního rozšíření Keenerovy metody, a některé z toho plynoucí benefity při určování pořadí. Metoda může být chápána jako nelineární zobecnění Perronovy-Frobeniovy věty.

V šesté kapitole jsme si ukázali použití rankingových systémů, uvedených v druhé sekci kapitoly páté, na příkladech sportovních soutěží z reálného světa. Ukázalo se, že pokud týmy proti sobě hrají stejný počet zápasů, Keenerovou metodou dostaneme téměř stejné pořadí, jaké bylo to oficiální. Pokud je celkový počet utkání vysoký, vliv rankingu není tolik viditelný. U NFL se ukázala jediná velká slabina Keenerovy metody, a to v tom smyslu, že v případě, pokud má tým pouze slabé protivníky, nemůže získat vysoké ohodnocení, i kdyby téměř všechny své zápasy vyhrál.

A v závěrečné kapitole s číslem sedm jsme porovnali dvě metody možného hodnocení z šachového prostředí s námi navrženými metodami a zjistili jsme, že by místo Sonnebornovy-Bergerovy metody bylo vhodnější použít Keenerovu metodu.

Problematika byla velice zajímavá a poučná. Do budoucna by bylo zajímavé se pokusit sestrojit komplexnější rozdělení bodů, které by se zohledňovalo více faktorů zároveň, např. bodový zisk z výsledků zápasu, počet vstřelených branek či střel na branku, atd. Nebo se pokusit najít jinou hodnotící funkci, která by splňovala podmínky sekce 5.3, a současně by dávala věrohodné ohodnocení týmů v rámci užitých rankingových metod.

Reference

[1] J. P. Keener: *The Perron-Frobenius Theorem and the ranking of football teams*, SIAM Rev. **35** (1993), No. 1, 80–93.

[2] C. Eschenbach et al.: *Properties of Tournaments among Well-Matched Players*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), No. 10, 881–892.

[3] F. R. Gantmacher: *Applications of the theory of matrices*, Dover ed. Přeložil J. L. Brenner, Mineola: Dover Publications, 2005.

[4] R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix analysis*, New York: Cambridge University Press, 1985.

[5] L. Čermák: *Numerické metody*, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020.
[6] J. L. Gross, J. Yellen: *Graph theory and its applications*, New York: Chapman and Hall, 2006.

Lubomír Pažourek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: lubomir.pazourek@vutbr.cz