SOUČTY ŘAD PŘEVRÁCENÝCH HODNOT VŠECH SOUČINŮ GENEROVANÝCH DVĚMA A VÍCE PŘIROZENÝMI ČÍSLY

RADOVAN POTŮČEK

Abstrakt. V tomto článku je prezentován jeden typ nekonečných číselných řad, které jsou generovány převrácenými hodnotami ke všem součinům dvou a více přirozených čísel. Tyto řady tak představují příklad redukované harmonické řady, tedy harmonické řady s některými vynechanými členy. Jsou uvedeny dva způsoby, jak tyto řady sečíst. Jedním způsobem je zápis těchto řad ve tvaru součtu dílčích řad a určení příslušných dílčích součtů postupným užitím vzorce pro součet nekonečné geometrické řady. Druhým, výrazně jednodušším, způsobem je zápis těchto řad ve tvaru součinu a užití vzorce pro součet jednotlivých nekonečných geometrických řad. Získané výsledky jsou zobecněny pro n generujících přirozených čísel a numericky ověřeny pro dvě a tři jednociferná čísla užitím systému počítačové algebry Maple.

1. Úvod

Článek je inspirován úlohou 5.4 z roku 2002 na určení součtu speciální nekonečné řady obsaženou ve studijním materiálu [5]. Úlohy z různých oblastí matematiky jsou každý týden ve formě studijních materiálů předkládány studentům a dalším zájemcům o hlubší studium matematiky sdružených do skupiny *the Berkeley Math Circle* při Kalifornské univerzitě v Berkeley. Touto úlohou bylo určit součet všech zlomků, které mají v čitateli jedničku a ve jmenovateli součiny generované všemi prvočíselnými děliteli čísla 2002, tedy prvočísly 2, 7, 11 a 13. Jednalo se tak o úlohu určit součet nekonečné číselné řady

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 13}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 7}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\frac{1}{22}+\frac{1}{26}+\frac{1}{28}+\cdots.$$

V tomto článku se budeme zabývat jistým zobecněním této úlohy spočívajícím v tom, že budeme určovat součet všech zlomků, které mají v čitateli jedničku a ve jmenovateli součiny generované všemi 2-prvkovými i víceprvkovými podmnožinami jednociferných čísel s výjimkou čísla 1, tedy přirozenými čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2020 *MSC.* Primární 40A02.

Klíčová slova. Nekonečná řada, geometrická řada, harmonická řada, redukovaná harmonická řada, systém počítačové algebry Maple.

Práce prezentovaná v tomto článku je podporována Projektem pro rozvoj organizace „DZRO Vojenské autonomní a robotické systémy“.

Číslo 1 neuvažujeme proto, že budeme hledat součty konvergentních řad a součet zlomků majících ve jmenovateli mocniny čísla 1, tj. dílčí součet

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^3}+\frac{1}{1^4}+\frac{1}{1^5}+\cdots$$

obsažený v jakékoliv řadě generované i dalšími jednocifernými čísly, tvoří divergentní řadu se součtem ∞.

Protože výše zmíněná úloha i dále řešené úlohy se týkají redukovaných harmonických řad, uvedeme nejprve stručných přehled několika základních a dalších potřebných pojmů z teorie nekonečných číselných řad.

2. Základní pojmy

Definice 2.1. Pro libovolnou číselnou posloupnost $\{a_k\}$ je odpovídající **nekonečná řada**, dále stručněji **řada**, definována jako součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \ .$$

Definice 2.2. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je definována pro každé $n \in \mathbb{N}$ jako posloupnost konečných součtů tvaru

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \, .$$

Definice 2.3. Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ má limitu s, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, potom je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergentní**. Pokud tato limita s neexistuje nebo je nevlastní, tedy $s = \pm\infty$, je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergentní**. V případě konvergentní řady říkáme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ má **součet** s a píšeme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Definice 2.4. Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, pak říkáme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je **absolutně konvergentní**.

Poznamenejme, že pro konvergentní řady platí asociativní a distributivní zákon. Připomeňme, že přerovnání členů absolutně konvergentní řady nemá vliv ani na její konvergenci, ani na její součet.**Součinem** dvou absolutně konvergentních řad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ se součty s_a a s_b je opět absolutně konvergentní řada, která má součet $s_a s_b$. Součin dvou absolutně konvergentních řad je přitom dán vztahem

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k-1} a_\ell b_{k-\ell} =$$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + \\ + a_2b_2 + a_3b_1 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + \cdots .$$

Definice 2.5. Geometrická řada je definována jako součet nekonečně mnoha členů geometrické posloupnosti, tedy posloupnosti s prvním členem a, v níž je podíl q - dvou po sobě jdoucích členů konstantní. Geometrická řada je tak řada tvaru

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k.$$

Připomeňme, že pro součet s konvergentní geometrické řady s prvním členem a a kvocientem q, kde $|q| < 1$, platí známý vzorec

$$s = \frac{a}{1-q}. \tag{2.1}$$

Příklad 2.6. Součtem řady převrácených hodnot jistých přirozených čísel rozumíme součet příslušných zlomků s jedničkou v čitateli. Příkladem takového součtu je:
a) Součet řady převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel (tato úloha pocházející z roku 1650 je nazývána **Basilejský problém**)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1{,}644934.$$

b) Součet řady převrácených hodnot třetích mocnin přirozených čísel, jehož výsledkem je tzv. **Apéryho konstanta**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots \doteq 1{,}202057.$$

Obecně představuje součet $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ takzvanou **Riemannovu funkci zeta** komplexní proměnné s. Je známo, že tato řada konverguje, pokud je reálná část čísla s větší než jedna. Tedy $\zeta(2) = \pi^2/6$ a $\zeta(3)$ představuje Apéryho konstantu.

Definice 2.7. Harmonická řada je definována jako řada převrácených hodnot ke všem přirozeným číslům, takže je tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots .$$

Název řady, o níž lze např. integrálním kritériem konvergence snadno dokázat, že diverguje, je dán tím, že každý člen této řady kromě prvního je harmonickým průměrem jeho dvou sousedních členů. Takže např.

$$\frac{2}{1/(1/3) + 1/(1/5)} = \frac{2}{3+5} = \frac{1}{4}.$$

Definice 2.8. Redukovanou harmonickou řadu definujeme jako neúplnou harmonickou řadu, z níž byly vynechány některé její členy.

Příklad 2.9. K důležitým příkladům redukovaných harmonických řad patří:
a) Řada převracených hodnot k prvočíslům a k číslu 1

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots,$$

jejíž divergenci dokázal již Leonhard Euler (viz např. knihu [2]).
b) Řada převrácených hodnot k faktoriálům nezáporných celých čísel

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots,$$

která konverguje a jejíž součet je Eulerovo číslo $\mathrm{e}=2{,}718281828\ldots$.
c) **Kempnerova řada** K_c, která vznikne z harmonické řady vynecháním všech členů $1/n$, kde n obsahuje v desítkové soustavě číslici c. Tedy např. vynecháním všech členů obsahujících ve jmenovateli číslici 9 obdržíme řadu

$$K_9=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{88}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots,$$

která byla poprvé studována v roce 1914 v článku [4]. Touto řadou se zabýval britský matematik Aubrey John Kempner (1880–1972), který v článku dokázal, že řada K_9 překvapivě konverguje.

Lze dokázat, že všech dalších devět Kempnerových řad $K_0, K_1, \ldots, K_8$ konverguje. Kempnerovým řadám je mj. věnován článek [1] nebo část 3. kapitoly v knize [3].

Následující tabulka udává přibližné hodnoty součtů $S_0, S_1, \ldots, S_9$ těchto řad zaokrouhlené na tři desetinná místa.

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_c	23,103	16,177	19,257	20,570	21,327	21,835	22,206	22,493	22,726	22,921

Tabulka 1. Přibližné hodnoty součtů Kempnerových řad.

Poznamenejme, že v článku [6] je uveden algoritmus, který zobecňuje problém chybějících číslic na chybějící řetězec číslic. Např. součet zobecněné Kempnerovy řady s vynechaným číselným řetězcem 42 je v tomto článku vyčíslen přibližně hodnotou 228,446.

3. Dva způsoby výpočtu součtů řad převrácených hodnot všech součinů generovaných dvěma a třemi přirozenými čísly

Oba dále uvedené způsoby výpočtu součtu těchto řad nejprve ukážeme na dvou konkrétních příkladech součtu řad generovaných dvěma a třemi přirozenými čísly. Druhý, a výrazně kratší, způsob následně zobecníme na určení součtů řad generovaných libovolným počtem přirozených čísel.

Příklad 3.1. Určete součet řady převrácených hodnot všech součinů generovaných čísly 2 a 3, tj. součet řady

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 2}\\
&\qquad+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{3^3\cdot 2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{12}\\
&\qquad+\frac{1}{18}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{24}+\frac{1}{54}+\frac{1}{36}+\cdots.
\end{aligned}$$

Řešení:
a) Srovnávacím kritériem lze ukázat, že daná řada konverguje, což zaručuje platnost asociativního zákona.. Uvažujme majorantní řadu, která má oproti dané řadě ve jmenovatelích zlomků pouze základy 2:

$$\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{k+1}{2^k}+\cdots.$$

Konvergenci této majorantní řady lze ověřit limitním podílovým kritériem, kdy

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{2^{k+1}}\,\frac{2^k}{k+1}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{k+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Daná řada, kterou budeme dále značit T, tak má konečný součet S. Protože všechny její členy jsou kladné, konverguje řada T absolutně, takže její členy lze přerovnat. Členy řady T nyní uzávorkujme podle součtu exponentů. Dostaneme tak řadu tvaru

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 2}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{3^3\cdot 2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}\right)+\cdots.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Pro určení součtu S řadu T vhodně přerovnáme, a to na tvar

$$\begin{aligned}
T&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{3^3\cdot 2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Takto přerovnanou řadu T nyní rozdělíme na tři dílčí řady T_2, T_3 a $T_{2\cdot 3}$, kde

$$T_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right),\tag{3.2}$$

$$T_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right),\tag{3.3}$$

$$T_{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{3^3\cdot 2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\cdots,$$

tj.

$$T_{2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\right). \tag{3.4}$$

Součet S určíme pomocí součtů dílčích řad (3.2)–(3.4). Užitím vzorce (2.1) pro součet konvergentní geometrické řady získáme součty S_2 a S_3 řad (3.2) a (3.3):

$$S_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{2-1} = 1, \tag{3.5}$$

$$S_3 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{3}\,\frac{3}{3-1} = \frac{1}{2}\,. \tag{3.6}$$

Je zřejmé, že součet $S_{2\cdot 3}$ dílčí řady (3.4) můžeme zapsat ve tvaru

$$S_{2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3}\big(1+S\big) = \frac{1}{6}\big(1+S\big). \tag{3.7}$$

Na základě platnosti absolutní konvergence řady (3.1)) můžeme její součet S zapsat ve tvaru

$$S = S_2 + S_3 + S_{2\cdot 3}\,.$$

Užitím vztahů (3.5)–(3.7) obdržíme rovnici

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(1+S).$$

Vynásobením rovnice číslem 6 dostaneme rovnici

$$6\,S = 6 + 3 + 1 + S,$$

tj. $5S = 10$, odkud

$$S = 2.$$

b) Uvažujme dvě geometrické řady U a V s prvním členem 1 a s kvocienty $2^{-1} = \frac{1}{2}$ a $3^{-1} = \frac{1}{3}$, tedy geometrické řady tvaru

$$U = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\,,$$

$$V = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

se součty S_U a S_V, které podle vzorce (2.1) jsou

$$S_U = \frac{1}{1-1/2} = \frac{2}{2-1} = 2,$$

$$S_V = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}\,.$$

Protože jsou řady U a V absolutně konvergentní, je jejich součinem opět absolutně konvergentní řada

$$U\cdot V = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right).$$

Je zřejmé, že roznásobením členů obou řad obdržíme řadu tvaru

$$U\cdot V = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 2} + \cdots\,,$$

tedy řadu $1 + T$ se součtem $1 + S$. Z rovnice

$$1 + S = S_U S_V$$

dostáváme

$$S = S_U S_V - 1,$$

tj. $S = 2\,\dfrac{3}{2} - 1$, odkud

$$S = 2.$$

Oběma způsoby výpočtu jsme tak obdrželi stejný výsledek: řada T má součet $S = 2$.

Příklad 3.2. Určete součet řady převrácených hodnot všech součinů generovaných čísly 4, 5 a 6, tj. součet řady

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2 \cdot 5} + \cdots$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{80} + \cdots.$$

Řešení:
a) Srovnávacím kritériem lze ukázat, že daná řada konverguje, což zaručuje platnost asociativního zákona.. Uvažujme majorantní řadu, která má oproti dané řadě ve jmenovatelích zlomků pouze základy 4:

$$\frac{3}{4^1} + \frac{6}{4^2} + \frac{10}{4^3} + \frac{15}{4^4} + \cdots + \frac{\binom{k+2}{2}}{2 \cdot 4^k} + \cdots,$$

tedy řadu tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)}{2 \cdot 4^k}.$$

Konvergenci této majorantní řady lze opět ověřit limitním podílovým kritériem:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+3)(k+2)}{2 \cdot 4^{k+1}} \, \frac{2 \cdot 4^k}{(k+2)(k+1)} = \frac{1}{4} \lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{k+1} = \frac{1}{4} < 1.$$

Daná řada, kterou budeme stejně jako v příkladu 3.1 značit T, má tedy konečný součet S. Protože všechny její členy jsou kladné, konverguje řada T absolutně, takže její členy můžeme přerovnat. Členy řady T nyní uzávorkujme podle součtu exponentů. Dostaneme tak řadu tvaru

$$T = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{4^2 \cdot 5} + \frac{1}{4^2 \cdot 6} + \frac{1}{5^2 \cdot 4} + \frac{1}{5^2 \cdot 6}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{6^2 \cdot 4} + \frac{1}{6^2 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{4^3 \cdot 5} + \frac{1}{4^3 \cdot 6} + \frac{1}{5^3 \cdot 4} + \frac{1}{5^3 \cdot 6} + \frac{1}{6^3 \cdot 4} + \frac{1}{6^3 \cdot 5}\right.$$

$$+\frac{1}{4^2\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5^2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{6^2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4^2\cdot 5^2}+\frac{1}{4^2\cdot 6^2}+\frac{1}{5^2\cdot 6^2}\Bigg)+\cdots.$$

Pro určení součtu S řadu T vhodně přerovnáme, a to na tvar

$$\begin{aligned}T=&\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)\\&+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)\\&+\Bigg(\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4^2\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{4^3\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 4}\\&\quad+\frac{1}{4^2\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5^2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{6^2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4^2\cdot 5^2}+\cdots\Bigg)\\&+\left(\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{4^2\cdot 6}+\frac{1}{6^2\cdot 4}+\frac{1}{4^3\cdot 6}+\frac{1}{6^3\cdot 4}+\frac{1}{4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)\\&+\left(\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{5^2\cdot 6}+\frac{1}{6^2\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 6}+\frac{1}{6^3\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 6^2}+\cdots\right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Takto přerovnanou řadu T nyní rozdělíme na šest dílčích řad T_4, T_5, T_6, $T_{4\cdot 5}$, $T_{4\cdot 6}$ a $T_{5\cdot 6}$, kde

$$T_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right),\tag{3.9}$$

$$T_5=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right),\tag{3.10}$$

$$T_6=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\cdots=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\cdots\right),\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}T_{4\cdot 5}=&\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4^2\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{4^3\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 4}\\&+\frac{1}{4^2\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5^2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{6^2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4^2\cdot 5^2}+\cdots,\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}T_{4\cdot 5}=&\frac{1}{4\cdot 5}\Bigg(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\\&\quad+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\Bigg),\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$T_{4\cdot 6}=\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{4^2\cdot 6}+\frac{1}{6^2\cdot 4}+\frac{1}{4^3\cdot 6}+\frac{1}{6^3\cdot 4}+\frac{1}{4^2\cdot 6^2}+\cdots,$$

tj.

$$T_{4\cdot 6}=\frac{1}{4\cdot 6}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots\right),\tag{3.13}$$

$$T_{5\cdot 6} = \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{5^2\cdot 6} + \frac{1}{6^2\cdot 5} + \frac{1}{5^3\cdot 6} + \frac{1}{6^3\cdot 5} + \frac{1}{5^2\cdot 6^2} + \cdots,$$

tj.

$$T_{5\cdot 6} = \frac{1}{5\cdot 6}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots\right). \tag{3.14}$$

Hledaný součet S určíme pomocí součtů dílčích řad (3.9)–(3.14). Užitím vzorce (2.1) pro součet konvergentní geometrické řady získáme součty S_4, S_5 a S_6 řad (3.9), (3.10) a (3.11):

$$S_4 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{4-1} = \frac{1}{3}, \tag{3.15}$$

$$S_5 = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-1/5} = \frac{1}{5}\,\frac{5}{5-1} = \frac{1}{4}, \tag{3.16}$$

$$S_6 = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-1/6} = \frac{1}{6}\,\frac{6}{6-1} = \frac{1}{5}. \tag{3.17}$$

Je zřejmé, že součet $S_{4\cdot 5}$ dílčí řady (3.12) můžeme zapsat ve tvaru

$$S_{4\cdot 5} = \frac{1}{4\cdot 5}(1+S) = \frac{1}{20}(1+S). \tag{3.18}$$

Součty $S_{4\cdot 6}$ a $S_{5\cdot 6}$ řad (3.13) a (3.14) jsou součty všech zlomků s jedničkou v čitateli a ve jmenovateli se všemi mocninami součinů čísel 4, 6 a 5, 6.

Výraz v závorkách ve vyjádření součtu $S_{4\cdot 6}$ řady (3.13) přerovnáme a zapíšeme jako součet čísla 1 a tří dílčích řad T_4, T_6 a $T_{4\cdot 6}$ se součty $S_4 = 1/3$, $S_6 = 1/5$ a $S_{4\cdot 6}$. Dostáváme tak rovnici

$$S_{4\cdot 6} = \frac{1}{4\cdot 6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + S_{4\cdot 6}\right).$$

Vynásobením číslem 360 obdržíme rovnici $360S_{4\cdot 6} = 15 + 5 + 3 + 15S_{4\cdot 6}$, odkud

$$S_{4\cdot 6} = \frac{23}{345} = \frac{1}{15}. \tag{3.19}$$

Analogicky obdržíme pro součet $S_{5\cdot 6}$ rovnici

$$S_{5\cdot 6} = \frac{1}{5\cdot 6}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + S_{5\cdot 6}\right).$$

Z této rovnice obdržíme úpravou rovnici $600S_{5\cdot 6} = 20 + 5 + 4 + 20S_{5\cdot 6}$, odkud

$$S_{5\cdot 6} = \frac{29}{580} = \frac{1}{20}. \tag{3.20}$$

Na základě platnosti absolutní konvergence řady T můžeme vzhledem k (3.8) její součet S zapsat ve tvaru

$$S = S_4 + S_5 + S_6 + S_{4\cdot 5} + S_{4\cdot 6} + S_{5\cdot 6}.$$

Užitím vztahů (3.15)–(3.20) obdržíme rovnici

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}(1+S) + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}.$$

Vynásobením rovnice číslem 60 dostaneme rovnici

$$60S = 20 + 15 + 12 + 3 + 3S + 4 + 3,$$

tj. $57S = 57$, odkud

$$S = 1.$$

b) Uvažujme tři geometrické řady U, V a W s prvním členem 1 a s kvocienty $4^{-1} = \frac{1}{4}$, $5^{-1} = \frac{1}{5}$ a $6^{-1} = \frac{1}{6}$, tedy geometrické řady tvaru

$$\begin{aligned} U &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots\,, \\ V &= 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots\,, \\ W &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \cdots \end{aligned}$$

se součty S_U, S_V a S_W, které podle vzorce (2.1) jsou

$$\begin{aligned} S_U &= \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}\,, \\ S_V &= \frac{1}{1 - 1/5} = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}\,, \\ S_W &= \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5}\,. \end{aligned}$$

Protože jsou řady U, V a W absolutně konvergentní, je jejich součinem opět absolutně konvergentní řada

$$\begin{aligned} U \cdot V \cdot W = &\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Je zřejmé, že roznásobením členů těchto tří řad obdržíme řadu tvaru

$$\begin{aligned} U \cdot V \cdot W = 1 &+ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6} \\ &+ \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{4^2 \cdot 5} + \frac{1}{4^2 \cdot 6} + \frac{1}{5^2 \cdot 4} + \frac{1}{5^2 \cdot 6} \\ &+ \frac{1}{6^2 \cdot 4} + \frac{1}{6^2 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\,, \end{aligned}$$

tedy řadu $1 + T$ se součtem $1 + S$. Z rovnice

$$1 + S = S_U S_V S_W$$

dostáváme

$$S = S_U S_V S_W - 1,$$

tj. $S = \frac{4}{3}\,\frac{5}{4}\,\frac{6}{5} - 1$, odkud

$$S = 1.$$

Oběma způsoby výpočtu jsme tak obdrželi opět stejný výsledek: Daná řada T má součet $S = 1$.

Je zřejmé, že druhý způsob výpočtu se zápisem dané řady ve tvaru součinu dílčích konvergentních geometrických řad je výrazně jednodušší a pro více než dvě přirozená čísla generující tyto řady i značně přehlednější. Proto nyní uvedeme hlavní výsledek týkající se druhého způsobu určení součtu uvažovaných řad.

4. Vzorec pro výpočet součtu řady převrácených hodnot všech součinů generovaných n přirozenými čísly

Zobecněním druhého způsobu řešení výše uvedených příkladů 3.1 a 3.2 dostáváme následující tvrzení.

Věta 4.1. *Součet $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ řady převrácených hodnot všech součinů generovaných n různými jednocifernými čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$ většími než 1, kde $2 \le n \le 8$, je dán vztahem*

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - 1/a_k} - 1,$$

tedy vztahem

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k - 1} - 1. \tag{4.1}$$

Poznámka 4.2. Ve speciálním případu, kdy čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tvoří posloupnost n po sobě jdoucích přirozených čísel $(m, m+1, \ldots, m+n-1)$, se v součinu $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k-1}$ ve vztahu (4.1) zřejmě vykrátí všechny čitatele a jmenovatele, až na poslední čitatel a první jmenovatel, takže pro n po sobě jdoucích přirozených čísel začínajících číslem m platí jednodušší vztah

$$S(m, m+1, \ldots, m+n-1) = \frac{m+n-1}{m-1} - 1,$$

tedy vztah

$$S(m, m+1, \ldots, m+n-1) = \frac{n}{m-1}\,, \tag{4.2}$$

speciálně pak vztah

$$S(2, 3, \ldots, n+1) = n.$$

Takže například $S(2,3) = \frac{2}{2-1} = 2$ a $S(4,5,6) = \frac{3}{4-1} = 1$, jak jsme vypočítali výše v příkladech 3.1,a 3.2.

Poznámka 4.3. Poznamenejme, že výše uvedený vzorec (4.1) samozřejmě platí nejen pro jednociferná čísla, ale pro libovolná přirozená čísla s výjimkou jedničky. Takže například v úvodu uvedená motivační úloha na určení součtu všech zlomků, které mají v čitateli jedničku a ve jmenovateli součiny generované všemi prvočíselnými děliteli čísla 2002, tedy prvočísly 2, 7, 11 a 13, má součet

$$S(2,7,11,13) = \frac{2}{2-1}\,\frac{7}{7-1}\,\frac{11}{11-1}\,\frac{13}{13-1} - 1 = \frac{2\cdot 7\cdot 11\cdot 13}{1\cdot 6\cdot 10\cdot 12} - 1 = 1{,}708\overline{5}.$$

5. Numerické ověření vzorce

Vzorec (4.1) ověříme numericky alespoň pro dvě a tři jednociferná generující čísla užitím základního programovacího jazyka systému počítačové algebry Maple 2022. Užijeme přitom následující procedury `sum2` a `sum3`, které porovnávají hodnoty součtů vypočtené vzorcem (4.1) s přibližnými hodnotami součtů členů těchto řad, pro které má součet p všech exponentů n jednociferných činitelů ve jmenovateli hodnotu $p = 100$, pro kterou jsou délky trvání příslušných výpočtů ještě docela krátké. Procedurou `sum2` bylo vypočteno $\binom{8}{2} = 28$ součtů řad během 6 sekund a procedurou `sum3` bylo vypočteno $\binom{8}{3} = 56$ součtů řad během 86 sekund.

Pokud bychom výpočty prováděli pro všechna generující jednociferná čísla s výjimkou jedničky, bylo by takových dílčích vypočtených součtů celkem

$$\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = 28+56+70+56+28+8+1 = 247.$$

Obě níže uvedené procedury `sum2` a `sum3` byly následně užity v rámci dvou, resp. tří, vnořených cyklů.

```
sum2:=proc(a,b,p)
    local i,j,n,re,s,sf;
    s:=0; sf:=(a*b)/((a-1)*(b-1))-1;
    for n from 1 to p do
        for i from 0 to n do
            for j from 0 to n-i do
                if i+j = n then
                   s:=s+1/(a^i*b^j);
                end if;
            end do;
        end do;
    end do;
    re:=abs(s-sf)/s;
    print("sum for the most power",p,"for",a,b,"is",evalf[16](s),
        "sf is",sf,"relative error is",evalf[10](re));
end proc:

for a from 2 to 8 do
    for b from a+1 to 9 while b <> a do
        sum2(a,b,100);
    end do;
end do;
```

```
sum3:=proc(a,b,c,p)
    local i,j,k,n,re,s,sf;
    s:=0; sf:=(a*b*c)/((a-1)*(b-1)*(c-1))-1;
    for n from 1 to p do
        for i from 0 to n do
            for j from 0 to n-i do
```

```
                for k from 0 to n-i-j do
                    if i+j+k = n then
                       s:=s+1/(a^i*b^j*c^k);
                    end if;
                end do;
            end do;
        end do;
    end do;
    re:=abs(s-sf)/s;
    print("sum for the most power",p,"for",a,b,c,"is",evalf[16](s),
        "sf is",sf,"relative error is",evalf[10](re));
end proc:

for a from 2 to 8 do
    for b from a+1 to 9 while b <> a do
        for c from b+1 to 9 while c <> b do
            sum3(a,b,c,100);
        end do;
    end do;
end do;
```

Pro součet exponentů $p = 100$ byly součty řad generovaných dvěma čísly vypočteny s relativními chybami v rozpětí řádově 10^{-30} až 10^{-90} a součty řad generovaných třemi čísly s relativními chybami v rozpětí řádově 10^{-30} až 10^{-84}.

Tabulka 2 obsahuje součty řad generovaných dvěma jednocifernými čísly většími než jedna určené vzorcem (4.1) a ověřené procedurou `sum2`.

Celočíselných hodnot přitom nabývají pouze dva součty: $s(2,3) = 2$ (příklad 3.1) a $s(3,4) = 1$.

$a \setminus b$	3	4	5	6	7	8	9
2	2	5/3	3/2	7/5	4/3	9/7	5/4
3	×	1	7/8	4/5	3/4	5/7	11/16
4	×	×	2/3	3/5	5/9	11/21	1/2
5	×	×	×	1/2	11/24	3/7	13/32
6	×	×	×	×	2/5	13/35	7/20
7	×	×	×	×	×	1/3	5/16
8	×	×	×	×	×	×	2/3

Tabulka 2. Součty řad generovaných dvěma jednocifernými čísly.

Tabulka 3, která je uvedena na následující straně, obsahuje součty řad generovaných třemi jednocifernými čísly většími než jedna určené vzorcem (4.1) a ověřené procedurou `sum3`.

Celočíselných hodnot nabývá jen těchto pět součtů: $s(2,3,4)=3$, $s(2,4,9)=2$, $s(2,5,6)=2$, $s(3,7,8)=1$ a $s(4,5,6)=1$ (příklad 3.2).

$\boldsymbol{a=2}$	$c=4$	$c=5$	$c=6$	$c=7$	$c=8$	$c=9$
$b=3$	3	11/4	13/5	5/2	17/7	19/8
$b=4$	×	7/3	11/5	19/9	43/21	2
$b=5$	×	×	2	23/12	13/7	29/16
$b=6$	×	×	×	9/5	61/35	17/10
$b=7$	×	×	×	×	5/3	13/8
$b=8$	×	×	×	×	×	11/7
$\boldsymbol{a=3}$	×	$c=5$	$c=6$	$c=7$	$c=8$	$c=9$
$b=4$	×	3/2	7/5	4/3	9/7	5/4
$b=5$	×	×	5/4	19/16	8/7	71/64
$b=6$	×	×	×	11/10	37/35	41/40
$b=7$	×	×	×	×	1	31/32
$b=8$	×	×	×	×	×	13/14
$\boldsymbol{a=4}$	×	×	$c=6$	$c=7$	$c=8$	$c=9$
$b=5$	×	×	1	17/18	19/21	7/8
$b=6$	×	×	×	13/15	29/35	4/5
$b=7$	×	×	×	×	7/9	3/4
$b=8$	×	×	×	×	×	5/7
$\boldsymbol{a=5}$	×	×	×	$c=7$	$c=8$	$c=9$
$b=6$	×	×	×	3/4	5/7	11/16
$b=7$	×	×	×	×	2/3	41/64
$b=8$	×	×	×	×	×	17/28
$\boldsymbol{a=6}$	×	×	×	×	$c=8$	$c=9$
$b=7$	×	×	×	×	3/5	23/40
$b=8$	×	×	×	×	×	19/35
$\boldsymbol{a=7}$	×	×	×	×	×	$c=9$
$b=8$	×	×	×	×	×	1/2

Tabulka 3. Součty řad generovaných třemi jednocifernými čísly.

6. Závěr

Článek se zabývá jedním typem nekonečných číselných řad, které jsou generovány převrácenými hodnotami ke všem součinům dvou a více přirozených čísel. Tyto řady představují speciální případ redukované harmonické řady

Na konkrétních příkladech jsou prezentovány dva způsoby, jak tyto řady sečíst. Jednak užitím jejich zápisu ve tvaru součtu dílčích řad, které představují konvergentní nekonečné geometrické řady, a jednak značně jednodušším způsobem, při kterém řady zapíšeme ve tvaru součinu dílčích konvergentních nekonečných geometrických řad.

Na základě konkrétních příkladů těchto řad se dvěma a třemi generátory je uvedena věta obsahující vzorec pro libovolných n generujících přirozených čísel

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k - 1} - 1$$

a rovněž její důsledek pro n generátorů, které tvoří posloupnost po sobě jdoucích přirozených čísel. Získané výsledky jsou numericky ověřeny pro dvě a tři jednociferné generátory užitím systému počítačové algebry Maple.

Lze tedy konstatovat, že řady, které jsou generovány převrácenými hodnotami ke všem součinům dvou a více přirozených čísel, představují speciální případ konvergentních nekonečných řad, podobně jako geometrické řady a řady s teleskopickou vlastností, jejichž součet je určen relativně jednoduchým analytickým vzorcem.

Reference

[1] R. Baillie: *Summing the curious series of Kempner and Irwin*, 2008, online http://arxiv.org/pdf/0806.4410.pdf [Cit. 2023-08-31].

[2] G. H. Hardy, E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th Edition, Oxford University Press, London, 1975, online https://1library.net/document/zx5r2woq-hardy-wright-introduction-theory-numbers-pdf.html [Cit. 2023-08-31].

[3] J. Havil: *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, New Jersey, 2003, online https://www.academia.edu/8413794/Gamma_Exploring_Eulers_Constant_Havil[Cit.2023-08-31].

[4] A. J. Kempner: *A Curious Convergent Series*, Amer. Math. Monthly **21(1)** (1914), 48–50, online https://www.jstor.org/stable/2972074 [Cit.2023-08-31].

[5] T. Rike: *Infinite Series (Berkeley seminary)*, The study material of the Berkeley Math Circle, March 24, 2002, online https://www.docin.com/p-107850630.html [Cit. 2023-08-31].

[6] T. Schmelzer, R. Baillie: *Summing a Curious, Slowly Convergent Series*, Amer. Math. Monthly **115(6)** (1979), 525–540, online https://www.researchgate.net/publication/233542102_Summing_a_Curious_Slowly_Convergent_Series [Cit. 2023-08-31].

Radovan Potůček, Katedra matematiky a fyziky, Fakulta vojenských technologií, Univerzita obrany, Kounicova 65, 662 10 Brno, Česká republika,

e-mail: Radovan.Potucek@unob.cz