HRA HACKENSTRING A DYADICKÁ ČÍSLA

VÁCLAV VOPRAVIL

ABSTRAKT. V příspěvku se zabýváme kombinatorickými hrami pro dva hráče s úplnou informací a bez náhody. Ukážeme, že krátká hra HACKENSTRING má hodnoty pouze dyadická racionální čísla.

1. Úvod

Jedním z cílů teorie kombinatorických her je najít vítězné strategie. Jiným cílem je určit (Conwayovu, viz [4] a [2]) hodnotu hry a tím korigovat své tahy. Tedy odpovědět na otázky, kdo vyhraje a o kolik. Dalším cílem teorie je určit první vítězný tah. V obecném případě se nám to ne vždy podaří. V tomto článku uvádíme vítězné strategie pro určité pozice hry BíLočeRný Hackenstring. BíLočeRný Hackenstring je graf bíLých a čeRných hran, které jsou modelovány kameny v řadách a spojeny vlevo s vrcholem nazývaným země (základna). Základnu budeme znázorňovat jako svislou černou čáru. Hru hrají dva hráči: Levý a pRavý. Na tahu Levý musí vybrat bíLý kámen (hrana grafu), který odstraní. Všechny hrany, které již nejsou spojeny se základnou, jsou také smazány. Tah pRavého hráče je podobný, ale musí si vybrat čeRný kámen, který chce odstranit (smazat). První hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Každé pozici hry BíLočeRný Hackenstring lze přiřadit dyadické racionální číslo. Tato hodnota zcela určuje, kdo hru vyhraje. Dobrou představou je vláček s bíLými a čeRnými kameny, vlevo je lokomotiva. Po odebrání svého vagónku hráč odebírá i všechny vagónky, které nesouvisí se základnou. Hra se hraje i s více vláčky srovnanými do řádků pod sebe.

Poznamenejme ještě, že hra Hackenstring se studuje také v monografii [1], v níž lze nalézt srozumitelně podaný úvod do teorie kombinatorických her. Článek je založen na [9, 10]. V českém jazyce lze doporučit [3, 11, 12]. Pro první seznámení s tématem pak první díl [2] a [5].

2. BíLočeRný Hackenstring

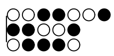
V této části je naším cílem seznámit čtenáře s kombinatorickou teorií her s důrazem na analýzu pozic ve hře BíLočeRný Hackenstring. Nyní by měl čtenář předpokládat, že všechny hry se hrají podle pravidel obvyklých pro BíLočeRný Hackenstring. Slova hra a pozice jsou zaměnitelná. Téměř veškerý materiál v této sekci lze nalézt v [9, 10] a [5].

2020 *MSC.* Primární 91A46.
Klíčová slova. teorie kombinatorických her, hra hackenstring, dyadická čísla.

2.1. BíLočeRný Hackenstring

Hra BíLočeRný Hackenstring je hra, která se hraje na grafu bíLých a čeRných hran. Existuje jedinečný vrchol, který označíme jako základnu. Je vhodné nakreslit vrchol země jako svislou černou čáru. Hru hrají dva hráči, Levý a pRavý, v tazích se hráči střídají. Na tahu musí hráč odstranit hranu své barvy. Levý může smazat bíLé a pRavý může smazat čeRné hrany. Po smazání hrany všechny ostatní hrany, které nejsou spojeny se základnou cestou, jsou také smazány. První hráč, který nemůže táhnout, prohrává.

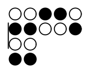
BíLé hrany budeme modeloval bíLými kroužky (kameny) a čeRné budeme modelovat čeRnými kameny (kroužky). Odebírá se zprava. Příklad takové hry je na obrázku 2.1. V něm i ve zbytku článku budeme bílé hrany znázorňovat bílými ka-



Obrázek 2.1. Příklad hry BíLočeRný Hackenstring.

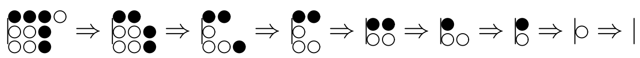
meny a čeRné hrany čeRnými kameny. Vrátíme-li se k výše uvedenému příkladu, můžeme provést hrubou silou pomocí tužky a papíru. Vítězem této hry je Levý hráč. Levý může tuto hru vyhrát bez ohledu na to, zda ve hře začínal, či ne.

Další příklad je uveden na obrázku 2.2. Ten je zvláštní tím, že má přirozenou



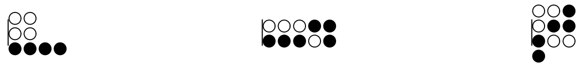
Obrázek 2.2. Příklad hry Tweedle Dee Tweedle Dum.

strategii pro druhého hráče. Druhý hráč může napodobovat tahy prvního hráče. Tímto způsobem druhému hráči nikdy nedojdou tahy dříve než prvnímu hráči. Strategie jednoho hráče, který napodobuje tahy druhého hráče, se nazývá strategie Tweedle Dee Tweedle Dum (TDTD). Výše uvedená hra je vítěznou pro druhého hráče (ten, který ve hře nezačínal).



Obrázek 2.3. Ukázka hry, pRavý začíná.

Zde začíná čeRný hráč a v poslední pozici, protože tam není žádný čeRný kámen, prohrává, nemá žádný možný tah.



Obrázek 2.4. Několik počátečních pozic.

2.2. Základní definice

Nechť G je hra. Píšeme

$$G = \{\mathscr{G}^L \mid \mathscr{G}^R\},$$

kde $\mathscr{G}^L = \{$množina dílčích pozic $G,$ kam Levý může zahrát jedním tahem$\}$ a dále $\mathscr{G}^R = \{$množina dílčích pozic $G,$ kam může pRavý zahrát prvním tahem v G$\}$.

Definujeme prvky $\mathscr{G}^L$ jako levé možnosti G. Levou možnost označujeme také jako G^L. Definujeme analogické termíny pro pravou variantu (možnost). V tomto článku budeme psát

$$G = \{G^L \mid G^R\},$$

kde G^L zahrnuje všechny levé možnosti a G^R zahrnuje všechny možné pravé možnosti.

Hra G je krátká hra, pokud splňuje následující dvě vlastnosti:

- G má konečný počet dílčích pozic.
- V G neexistuje nekonečná posloupnost tahů, tj. hra nakonec skončí.

Všechny hry v této kapitole jsou krátké hry. Hrajeme podle normální konvence, že první hráč, který není schopen tahu, prohrává. Předpokládáme také, že každá hra BíLočeRný Hackenstring má konečný počet hran.

Věta 2.1. *Každý* BíLočeRný Hackenstring *G je krátká hra.*

Důkaz. Nechť G je hra BíLočeRný Hackenstring. Na G se budeme dívat jako na graf bíLých a čeRných hran. Podle předpokladu má G n hran, kde n nějaké nezáporné celé číslo. Každý tah na G sníží počet hran alespoň o jednu. V nejvýše n tazích bude tedy G prázdný. Z toho vyplývá, že na G neexistuje nekonečná posloupnost tahů. G má konečný počet podgrafů. Každá podpozice G je podgrafem G. Můžeme tedy shrnout, že G je krátká. □

2.3. Krátké hry

V této části zkonstruujeme všechny krátké hry. Budeme definovat určitý vztah mezi krátkými hrami a uvidíme, že množina tříd ekvivalence spolu s určitým doplněním tvoří částečně uspořádanou abelovskou grupu.

Definujeme $0 = \{|\}$ a $\widetilde{\mathbb{G}}_0 = \{0\}$. Krátké hry narozené v den n rekurzivně definujeme takto

$$\widetilde{\mathbb{G}}_n = \big\{\{G^L \mid G^R\};\ G^L, G^R \subset \widetilde{\mathbb{G}}_{n-1}\big\}.$$

Definujeme

$$\widetilde{\mathbb{G}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{G}}_n$$

jako množinu krátkých her.

Definujeme disjunktní součet na hrách jako

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}.$$

Věta 2.2. *Součet na hrách vytváří abelovskou pologrupu.*

Důkaz. Nejprve indukcí dokážeme, že sčítání je komutativní. Podívejte se, $G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid \dots\} = \{H + G^L, H^L + G \mid \dots\} = H + G$ Důkaz pro asociativitu je podobný. □

Třídu výsledků hry, označovanou $v(G)$, definujeme následujícím způsobem:

- $v(G) = \mathscr{L} \Leftrightarrow$ levá strana může vyhrát, když táhne první nebo druhá,
- $v(G) = \mathscr{N} \Leftrightarrow$ vyhrává hráč, který je na tahu jako první,
- $v(G) = \mathscr{P} \Leftrightarrow$ vyhrává druhý hráč na tahu,
- $v(G) = \mathscr{R} \Leftrightarrow$ pravá strana může vyhrát, když táhne první nebo druhá.

Hry, patřící do $\mathscr{L}$, se nazývají kladné, patřící do $\mathscr{R}$ záporné, patřící do $\mathscr{P}$ nulové a patřící do $\mathscr{N}$ označíme jako fuzzy.

Věta 2.3 (Základní věta teorie kombinatorických her)**.** *Pro libovolnou krátkou G může vyhrát buď levá strana, která hraje první, nebo pravá strana, která hraje druhá, ale ne obě současně.*

Důkaz. Nechť G je krátká hra a G^L je libovolná levá možnost G. Potom indukcí a pomocí symetrie může pravá strana vyhrát G^L hrající jako první, nebo může vyhrát levá strana G^L hrající jako druhá, ale ne obojí. Jestliže pro všechny levé možnosti G^L, může vyhrát pRavý hrající G^L jako první, pak může pRavý vyhrát G hrající jako druhý. Na druhou stranu, pokud existuje levá možnost G^L taková, že levá strana může vyhrát hrající jako druhá, pak může levá strana vyhrát G přechodem na takovou variantu G^L. Je jasné, že nastane přesně jeden případ z těchto dvou možností. To dokazuje tvrzení. □

Důsledek 2.4. *Každá krátká hra G patří přesně do jedné třídy výsledků.*

Důkaz. Podle věty 2.3 patří každá krátká hra G do $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{N}$ nebo $\mathscr{P}$. Pokud hra G patřila do více než jedné výsledné třídy, pak bychom měli protipříklad k větě 2.3. □

Lemma 2.5. *Jestliže X patří do $\mathscr{P}$, pak $v(G + X) = v(G)$.*

Důkaz. Je třeba uvažovat dva případy:

Případ 1: Předpokládejme, že levá strana může vyhrát G, když hraje jako druhá. Předpokládejme, že pravá strana táhne jako první na $G + X$. Pak má levá strana zaručenou odpověď na té složce, ve které pravá strana táhla. Levá strana může pokračovat v této strategii, dokud pravé straně nedojdou tahy.

Případ 2: Předpokládejme, že Levý může vyhrát G hrající jako první. Pak má levá strana vítězný tah na G, který označíme jako G^L. Všimněte si, že Levý může vyhrát G^L, hraje-li jako druhý. Z toho plyne, že levá strana má tah na $G^L + X$, což je vítězný tah podle strategie v případě 1. □

Lemma 2.6. *Jestliže G a H patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$, pak $G + H$ patří také do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$.*

Důkaz. Stačí ukázat indukcí, že pRavý nemůže vyhrát, když ve hře začíná. Pokud pravá strana táhne první, pak podle indukční hypotézy musí mít Levý odpověď ve stejné komponentě. Levý tak může vždy najít správnou odpověď v komponentě, kde zahrál pRavý hráč. Proto také levé straně nedojdou tahy dříve než pravé straně, a protože tyto hry jsou krátké, pravé straně musí nakonec dojít tahy. □

Definice 2.7. Definujeme opačnou hodnotu krátké hry jako

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}.$$

Definice 2.8 (Kvaziuspořádání na $\widetilde{\mathbb{G}}$)**.** Relaci $\geqslant$ na $\widetilde{\mathbb{G}}$ definujeme tak, že říkáme, že $G \geqslant H$, jestliže a pouze tehdy, když $v(G + (-H)) = \mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$.

Věta 2.9. *$\geqslant$ je kvaziuspořádání na $\widetilde{\mathbb{G}}$.*

Důkaz. (Reflexivita): Uvažujme hru $G + (-G)$. Pak každý tah prvního hráče může být napodoben druhým hráčem ve druhé složce. Z toho vyplývá, že druhému hráči nikdy nedojdou tahy dříve než prvnímu hráči. Protože obě hry jsou krátké, prvnímu hráči musí nakonec dojít tahy. Proto $G + (-G)$ patří do $\mathscr{P}$ a $G \geqslant G$.

(Tranzitivita): Předpokládejme, že $G \geqslant H$ a $H \geqslant J$. Pak $G+(-H)$ a $H+(-J)$ patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Podle lemmatu 2.6 patří $G+(-H)+H+(-J)$ do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Podle lemmatu 2.5 a vzhledem k tomu, že $H+(-H)$ patří do $\mathscr{P}$, máme $G+(-J)$ patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. □

Lemma 2.10. *Nechť G, H jsou krátké hry. Pak $-(G + H) = (-G) + (-H)$.*

Důkaz. Podle definice 2.7 a indukcí dostaneme

$$\begin{aligned} -(G+H) &= -\{G^L + H, G + H^L \mid \dots\} = \{-(G^R + H), -(G+H)^R \mid \dots\} \\ &= \{-G^R - H, -G - H^R \mid \dots\} = (-G) + (-H). \end{aligned}$$

□

Věta 2.11. *Pro všechny krátké hry G, H, X platí, že $G \geqslant H$ implikuje $G + X \geqslant H + X$.*

Důkaz. S použitím věty 2.2 a lemmatu 2.10, $(G + X) + (-(H + X)) = G + (X + (-X)) - H$. Protože $X + (-X)$ patří do $\mathscr{P}$, díky lemma 2.5 dostaneme $v(G - H) = v(G + X + (-(H + X))$. Protože $G \geqslant H$, máme $G + X \geqslant H + X$. □

Ukázali jsme, že $(\widetilde{\mathbb{G}}, +)$ je kvaziuspořádaná abelovská pologrupa. Dále definujeme relaci na $\widetilde{\mathbb{G}}$ jako $G = H$ tehdy a jen tehdy, když $G \geqslant H$ a $H \geqslant G$.

Věta 2.12. *Výše definovaná relace $=$ je relace ekvivalence na $\widetilde{\mathbb{G}}$.*

Důkaz. Nechť $G, H, J \in \widetilde{\mathbb{G}}$.

(Reflexivita): Ekvivalentně $G \geqslant G$, což ukazuje, že $G + (-G)$ patří do $\mathscr{P}$. $G = G$.

(Symetričnost): Předpokládejme, že $G = H$. Pak $G \geqslant H$ a $H \geqslant G$. Ekvivalentně platí, že $H \geqslant G$ a $G \geqslant H$. Tedy $H = G$.

(Tranzitivita): Předpokládejme, že $G = H$ a $H = J$. Pak $G \geqslant H$ a $H \geqslant J$. Protože $\geqslant$ je tranzitivní, máme $G \geqslant J$. Podobně $J \geqslant G$. Takže $G = J$. □

Definujeme $\mathbb{G}$ jako množinu tříd ekvivalence tvořenou $\widetilde{\mathbb{G}}$ a výše uvedenou relací. Prvky $\mathbb{G}$ označujeme jako herní hodnoty. Sčítání v $\mathbb{G}$ definujeme jako $[G]+[H] = [G+H]$. Dále definujeme relaci $\geqslant$ na $\mathbb{G}$ pomocí $[G] \geqslant [H]$ tehdy a jen tehdy, když $G' \geqslant H'$ pro nějaké $G' \in [G]$ a nějaké $H' \in [H]$. Říkáme, že $[G] \vartriangleright [H]$ tehdy a jen tehdy, když $[G] \not\leqslant [H]$. Ukážeme, že $(\mathbb{G}, +)$ je částečně uspořádaná abelovská grupa.

Věta 2.13. *$[G] \geqslant [H]$ platí tehdy a jen tehdy, když $G \geqslant H$ pro nějaké $G \in [G]$ a nějaké $H \in [H]$ je dobře definovaná.*

Důkaz. Nechť $[G], [H]$ jsou herní hodnoty a $G, G' \in [G]$ a $H, H' \in [H']$. Předpokládejme, že $G \geqslant H$. Chceme ukázat, že $G' \geqslant H'$. Všimněte si, že $H = H'$ znamená, že $-H = -H'$. Z toho vyplývá, že $-H' \geqslant -H$. Máme také $G' \geqslant G$, $G' + (-H') \geqslant G + (-H')$ (Podle věty 2.11) $G + (-H') \geqslant G + (-H)$ (Podle věty 2.11) $G' + (-H') \geqslant G + (-H)$ (Protože $\geqslant$ v $\widetilde{\mathbb{G}}$ je tranzitivní). Znovu použijeme tranzitivitu a dostaneme $G' + (-H') \geqslant 0$. Z toho plyne, že $G' + (-H')$ patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$, z čehož vyplývá, že $G' \geqslant H'$. □

Věta 2.14. *$\geqslant$ je částečné uspořádání na $\mathbb{G}$.*

Důkaz. Nechť $[G], [H], [J]$ jsou herní hodnoty.

(Reflexivita): Vidíme, že $G \geqslant G$, protože $G + (-G)$ patří do $\mathscr{P}$. Proto $[G] \geqslant [G]$.

(Tranzitivita): Předpokládejme, že $[G] \geqslant [H]$ a $[H] \geqslant [J]$. Pak $(G + (-H)) + (H + (-J))$ je součet dvou her, které patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Součet tedy také patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Součet můžeme také přepsat jako $G + (-H + H) + (-J)$. Protože $-H + H$ patří do $\mathscr{P}$, můžeme uzavřít, že výsledek $G + (-J)$ je stejný jako výsledek $G + (-H + H) + (-J)$. Z toho vyplývá, že $G \geqslant J$. To znamená, že $[G] \geqslant [J]$.

(Antisymetričnost): Předpokládejme, že $[G] \geqslant [H]$ a $[H] \geqslant [G]$. Pak $G \geqslant H$ a $H \geqslant G$. Podle naší definice $=$ máme $G = H$, z čehož vyplývá $[G] = [H]$. □

Věta 2.15. *Výše definované sčítání je dobře definováno.*

Důkaz. Nechť $[G], [G'], [H], [H'] \in \mathbb{G}$ a předpokládejme, že $[G] = [G']$ a $[H] = [H']$. Chceme ukázat $[G + H] = [G' + H']$. Vidíme, že $G \geqslant G'$ a $H \geqslant H'$. Takže $G - G'$ a $H - H'$ jsou v $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Pak hra $(G + H) - (G' + H') = (G - G') + (H - H')$ patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Ekvivalentně platí, že $G + H \geqslant G' + H'$. S použitím symetrického argumentu platí, že $G' + H' \geqslant G + H$. Toto ukazuje, že $[G + H] = [G' + H']$ a tedy nezáleží na reprezentantech. □

Věta 2.16. *$(\mathbb{G}, +)$ je komutativní pologrupa.*

Důkaz. Tvrzení platí, protože $(\widetilde{\mathbb{G}}, +)$ je komutativní pologrupa. □

Věta 2.17. *$[0]$ je identita v $\mathbb{G}$.*

Důkaz. Všimněte si, že $[G] + [0] = [G + 0] = [G]$ pro všechna $[G] \in \mathbb{G}$. □

Lemma 2.18. *Jestliže $[G] \geqslant [H]$, pak $[G] + [J] \geqslant [H] + [J]$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pokud $G \geqslant H$, pak $G + J \geqslant H + J$. Všimněte si, že $(G + J) + (-(H + J)) = (G + (-H) + (J + (-J))$ je součet her patřících do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Proto $G + J + (-(H + J))$ také patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. To ukazuje, že $G + J \geqslant H + J$. Konkrétně, jestliže $[G] \geqslant [H]$, pak $G \geqslant H$. Ukázali jsme, že z toho vyplývá $G + J \geqslant H + J$. Z toho plyne také, že $[G] + [J] \geqslant [H] + [J]$. □

Věta 2.19. *Jestliže* $[G] = [H]$*, pak* $[G] + [J] = [H] + [J]$*.*

Důkaz. Předpokládejme, že $G = H$. Pak $G + J \geqslant H + J$ a $G + J \leqslant H + J$. Z definice vyplývá, že platí i rovnost, což je důkazem věty. □

Lemma 2.20. $v(G) = \mathscr{P}$ *tehdy a jen tehdy, když* $[G] = [0]$*.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$: Předpokládejme, že $v(G) = \mathscr{P}$. Pak G a $-G$ patří do $\mathscr{P}$. Proto $G \geqslant 0$ a $0 \geqslant G$. Ekvivalentně tedy $[G] = [0]$.

$(\Leftarrow)$: Předpokládejme, že $[G] = 0$. Pak G a $-G$ patří do $\mathscr{L}$ nebo $\mathscr{P}$. Pokud jedna z nich, řekněme G, patří do $\mathscr{L}$, pak musíme mít: $-G$ patří do $\mathscr{R}$, což je spor. Proto G a $-G$ patří do $\mathscr{P}$. Konkrétně G patří do $\mathscr{P}$. □

Věta 2.21. *Pro libovolné* $[G] \in \mathbb{G}$ *máme* $[G] + [-G] = [0]$*.*

Důkaz. Vidíme, že v $G + (-G)$ je vítězem druhý hráč pomocí TDTD argumentu.[1] Podle předchozího lemmatu 2.20 je $[G] + [-G] = [G + (-G)] = [0]$. □

Z toho můžeme vyvodit, že $(\mathbb{G}, +)$ je částečně uspořádaná abelovská grupa. Na tomto místě upustíme od zápisu v závorkách.

Důsledek 2.22. *Nechť* G, H *jsou herní hodnoty. Pak* $G + (-H) = 0$ *tehdy a jen tehdy, když* $G = H$*.*

Důkaz. Máme $G + (-H) = 0 \Leftrightarrow G + (-H) + H = 0 + H \Leftrightarrow G + 0 = H \Leftrightarrow G = H$. □

V dalších kapitolách využijeme výše uvedený důsledek k důkazu některých pravidel.

2.4. Kanonické formy

Intuitivně jsou některé tahy lepší než jiné. V těchto případech se zdá být intuitivní ignorovat tahy, které nejsou optimální. Co máme na mysli optimálními tahy, bude předmětem této části.

Definice 2.23. Nechť G je hra a G^{L_1} a G^{L_2} jsou dvě levé možnosti hry G. Říkáme, že G^{L_2} je dominantní G^{L_1}, jestliže $G^{L_1} \geqslant G^{L_2}$.

Věta 2.24. *Nechť* G *je hra. Předpokládejme, že* $G^{L'}$ *je dominantní levá možnost. Uvažujme* $G = \left\{G^{L'}, G^{L} \,\middle|\, G^{R}\right\}$ *a* $H = \left\{G^{L} \,\middle|\, G^{R}\right\}$*, kde* G^{L} *zahrnuje všechny levé možnosti kromě* $G^{L'}$*. Pak* $G = H$*.*

[1] Strategie TDTD se také nazývá metodou kradení strategie, metodou kopírování tahů nebo strategy stealing.

Důkaz. Chceme dokázat, že $G - H = 0$, což je ekvivalentní tomu, že v $G - H$ je vítězem druhý hráč. Všimněte si, že $G - H = \{G^{L'}, G^L \mid G^R\} + \{-G^R \mid -G^L\}$. Předpokládejme, že levá strana se nejprve přesune do $G^{L'} - H$. Podle předpokladu existuje G^L taková, že $G^L \geqslant G^{L'}$. Proto se pRavý hráč může přesunout do $G^{L'} - G^L \leqslant 0$. PRavý si vynutil výhru. Každý další tah jednoho z hráčů má odpovídající tah druhého hráče na 0. Zejména pokud Levý táhne na $G^L - H$, pak pravá strana může odpovědět na $G^L - G^L = 0$. A pokud Levý táhne na $G - G^R$, pak pRavá strana může reagovat na $G^R - G^R = 0$. Podobný argument platí i pro zahajovací tahy pRavého. Můžeme dojít k závěru, že v $G - H$ vítězí druhý hráč, tj. že $G = H$. □

Lemma 2.25. *Pro krátké hry G, H, J platí, že pokud $G \,|\!\!\triangleright\, H$ a $H \geqslant J$, pak $G \,|\!\!\triangleright\, J$ (tj. levá strana má vítězný tah na $G - J$).*

Důkaz. Poznamenejme, že $G - J = (G - H) + (H - J)$. Při hře $G - H$ máme dáno, že Levý má vyhrávající tah, řekněme $(G - H)^L$. Označíme tento tah jako $(G - H)^L$. Pak $(G - H)^L \geqslant 0$. Součet her, které jsou nulové nebo kladné, je hra, která je nulová nebo kladná. Protože $(G - H)^L \geqslant 0$ a $H - J \geqslant 0$, máme $(G - H)^L + (H - J) \geqslant 0$. To ukazuje, že $(G - H)^L + (H - J)$ je vítězný tah pro levou stranu, což dokazuje lemma. □

Lemma 2.26. *Jestliže $J \lhd\!\!|\, H$, pak $G + J \lhd\!\!|\, G + H$.*

Důkaz. Uvažujme rozdílovou hru $(G + H) - (G + J)$. Tu můžeme přepsat jako $(G - G) + (H - J)$. Rádi bychom ukázali, že $0 \not\geqslant (G - G) + (H - J)$, tj. že levá strana má výhru, začíná-li. Protože $J \lhd\!\!|\, H$, Levý má vítězný tah na $H - J$. Označíme takovou možnost $(H - J)^L$. Uvažujme levou možnost $(G - G) + (H - J)^L$. To je součet her, které jsou $\geqslant 0$. Proto $(G - G) + (H - J)^L \geqslant 0$. To ukazuje, že levá strana má vítězný tah na $(G + H) - (G + J)$. □

Definice 2.27. Nechť G je hra a G^L je její levá možnost. Předpokládejme, že existuje pravá možnost G^{LR} taková, že $G^{LR} \leqslant G$. Potom říkáme, že G^L je reverzibilní přes G^{LR}.

Věta 2.28. *Nechť $G = \{G^{L'}, G^L \mid G^R\}$ je hra. Předpokládejme, že $G^{L'}$ je reverzibilní přes $G^{L'R}$. Nechť $H = \{G^{L'RL}, G^L \mid G^R\}$, kde $G^{L'RL}$ zahrnuje všechny levé možnosti $G^{L'R}$. Pak $G = H$.*

Důkaz. Nechť G a H jsou definovány, jak je uvedeno výše. Chceme ukázat, že $G - H = 0$ (tj. vítězství druhého hráče). Všimněte si, že $G - H = \{G^{L'}, G^L \mid G^R\} + \{-G^R \mid -G^{L'RL}, G^L\}$. Uvažujme levou stranu a úvodní tah do $G^{L'} - H$. Pravá strana může táhnout na $G^{L'R} - H$. Levá strana má dvě možnosti. Pokud levá strana se přesune do $G^{L'RL} - H$, pak má pravá strana vítězný tah na H do 0. V opačném případě levá strana táhne na $G^{L'R} - G^R$. Máme $G^{L'R} \leqslant G \lhd\!\!|\, G^R$. Podle lemmatu 2.25 pRavý zvítězí tahem na $G^{L'R} - G^R$.

Na druhou stranu předpokládejme, že se pRavý nejprve přesune na $G - G^{L'RL}$. Uvažujme $G^{L'RL} \lhd\!\!|\, G^{L'R}$. Z toho vyplývá, že $G - G^{L'RL} \,|\!\!\triangleright\, G - G^{L'R} \geqslant 0$. Podle lemmatu 2.25 platí, že $G - G^{L'RL} \,|\!\!\triangleright\, 0$, z čehož vyplývá, že Levý má vítěznou odpověď. Všechny ostatní první tahy mají odpověď Tweedle Dee Tweedle Dum na 0. Můžeme uzavřít $G = H$. □

Definice 2.29. Krátká hra G je v kanonické formě (tvaru), jestliže pro libovolnou dílčí pozici H hry G (včetně samotné G), nemá H žádné dominované možnosti a žádné reverzibilní možnosti.

Věta 2.30. *Nechť G je krátká hra. Existuje krátká hra K v kanonické formě taková, že $G = K$.*

Důkaz. Uvažujeme hru $G = \{G^L \mid G^R\}$. Indukcí můžeme předpokládat, že všechny dílčí pozice G jsou v kanonickém tvaru. Pro uvedení G do kanonické formy máme následující metodu:

1) Nahradíme všechny reverzibilní možnosti G^L příslušnými G^{LRL}. Totéž provedeme pro reverzibilní možnosti G^R.
2) Odstraníme všechny dominantní možnosti.
3) Pokud výsledná hra nemá žádné reverzibilní možnosti, STOP. V opačném případě se vrátíme ke kroku 1).

Výše uvedený postup musí skončit v konečném počtu kroků, protože G je krátká. Definujte výslednou hru jako G'. Pak $G' = G$ a G' je v kanonickém tvaru. □

Definice 2.31. Nechť G, H jsou hry. Říkáme, že $G \cong H$ tehdy a jen tehdy, když jejich herní stromy jsou identické (tj. jsou si rovny v $\widetilde{\mathbb{G}}$).[2]

Věta 2.32. *Jestliže $H = K$ a H, K jsou v kanonické formě, pak $H \cong K$.*

Důkaz. Nechť H^L je levá možnost H. Pak $H^L - K \lhd\!\mid 0$. Jestliže má pravá strana vítězný tah na H^L, pak $H^{LR} - K \leqslant 0$. To však znamená, že $H^{LR} \leqslant K \ = H$, tedy H^L je reverzibilní přes H^{LR}. To je v rozporu s naším předpokladem, že H je kanonická. Z toho vyplývá, že vítězný tah pRavého musí mít tvar $H^L - K^L \leqslant 0$. Z toho vyplývá, že $H^L \leqslant K^L$. K^L na chvíli uvažujeme pevně.

Předpokládejme, že se pRavý přesune nejprve do $H - K^L$. Pak má levá strana vítězný tah. Pokud je to na $H - K^{LR}$, pak $H - K^{LR} \geqslant 0$, tzn. že $K \geqslant K^{LR}$. Z toho vyplývá, že K^L je reverzibilní prostřednictvím K^L, což odporuje našemu předpokladu, že K je kanonický. Z toho vyplývá, že Levého vítězný tah musí mít tvar $H^{L'} - K^L$. Z toho vyplývá, že $H^L \leqslant K^L \leqslant H^{L'}$. Ale H nemá žádné dominantní tahy. Z toho vyplývá, že $H^L = K^L = H^{L'}$.

Pro všechny H^L, existuje K^L taková, že $H^L = K^L$ a naopak. Totéž můžeme udělat i s pravými možnostmi.

Dále ukážeme, že $H \cong K$. Z definice kanonického tvaru je každá dílčí pozice H a K kanonická. Konkrétně pro každou H^L a K^L takové, že $H^L = K^L$, máme $H^L \cong K^L$ indukcí. Z toho vyplývá, že $H \cong K$. □

[2]Stromy a grafy jsou studovány v [12].

2.5. Jednoduchost

Našimi hlavními nástroji pro studium HACKENSTRINGOVÝCH HER jsou věta o jednoduchosti a pravidlo jednoduchosti. Ukážeme, že každá pozice hry BíLoČeRný HACKENSTRING je číslo (definice 2.33). Podle věty o jednoduchosti lze každou pozici hry BíLoČeRný HACKENSTRING identifikovat jako určité dyadické racionální číslo. Pravidlo jednoduchosti nám dává způsob, jak toto dyadické racionální číslo nalézt. Všimněte si, že korespondence mezi čísly a dyadickými racionálními čísly respektuje částečné uspořádání. Zejména sčítání čísel (definice 2.33) respektuje běžnou aritmetiku. Proto například pokud lze pozici hry BíLoČeRný HACKENSTRING |○● identifikovat jako $\frac{1}{2}$, pak její výsledná třída je $\mathscr{L}$, tj. kladná.

Definice 2.33. Říkáme, že G je číslo, jestliže $H^L < H^R$ platí pro všechny dílčí pozice H v G (včetně samotného G).

Lemma 2.34. *Je-li G číslo, pak $G^L < G < G^R$ pro všechny levé a pravé možnosti G.*

Důkaz. Nechť G^L je levá možnost G. Ukážeme, že v rozdílu $G - G^L$ zvítězí Levý. Levá strana může vyhrát, když bude začínat, přesunem do $G^L - G^L$.

Předpokládejme, že pravá strana táhne jako první. Pokud pravá strana táhne na G, máme $G^R - G^L > 0$ podle definice čísla. Z toho vyplývá, že levá strana zvítězí. V opačném případě pokračuje pRavý na $-G^L$. Výsledná hra je $G+(-G^{LL})$. Levá strana odpovídá na $G^L + (-G^{LL})$. Tato hra je kladné číslo a levý má vítězný tah indukcí. Můžeme uzavřít, že $G^L < G$ pro všechny levé možnosti G. Podobným argumentem, $G < G^R$ platí pro všechny pravé možnosti G. □

Věta 2.35. *Je-li G číslo, pak $-G$ je číslo.*

Důkaz. Předpokládejme, že G je číslo. Pak $G^L < G^R$ pro všechny levé a pravé možnosti G. Nerovnost můžeme přepsat jako $-G^R < -G^L$. Levé možnosti $-G$ však vypadají jako $-G^R$ a pravé možnosti $-G$ vypadají jako $-G^L$. Z toho vyplývá, že $(-G)^L < (-G)^R$ pro všechny levé a pravé možnosti G. Z toho můžeme vyvodit, že $-G$ je číslo. □

Věta 2.36. *Jsou-li G a H čísla, pak $G + H$ je číslo.*

Důkaz. Z definice, že G a H jsou čísla, vyplývá, že $G^L < G^R$ a $H^L < H^R$. Z toho vyplývá, že $G^L + H < G^R + H$ a $G + H^L < G + H^R$. Proto stačí ukázat $G^L + H < G + H^R$ a $G + H^L < G^R + H$. První nerovnost lze přepsat jako $0 < (G - G^L) + (H^R - H)$. Tato nerovnost platí podle lemmatu 2.34. Druhou nerovnost lze přepsat jako $0 < (G^R - G) + (H - H^L)$. Tato nerovnost platí také podle stejného lemmatu 2.34. □

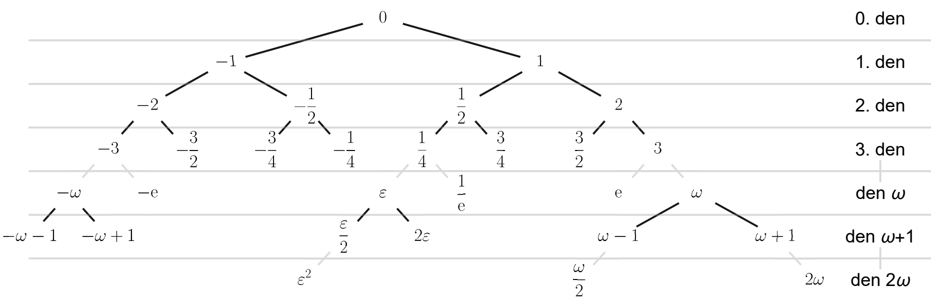
Množina čísel je neprázdná podmnožina $\mathbb{G}$ uzavřená při sčítání a opačného čísla. Můžeme tedy uzavřít, že množina čísel tvoří podgrupu $\mathbb{G}$.

Definice 2.37. Definujeme $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{a}{2^b};\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ a tuto množinu nazýváme množinou dyadických racionálních čísel.

Všimněte si, že $(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}], +)$ je podgrupa $(\mathbb{Q}, +)$. Naším dalším cílem je ukázat, že existuje grupový izomorfismus z podgrupy čísel do grupy dyadických racionálních čísel. Následovat bude věta o jednoduchosti a pravidlo jednoduchosti krátce poté, přičemž obě jsou pro studium hry BíLoČeRný Hackenstring klíčové.

Uvažujme nyní jeden bíLý kámen ve hře BíLoČeRný Hackenstring þ○. V této hře může zahrát Levý do 0 a pRavý nemá žádný pravidly povolený tah. Tedy þ○ $\equiv \{0 \mid\}$. Tato hra se označí 1, protože Levý má výhodu jednoho tahu. Protože $1 > 0$, generuje podgrupu grupy všech her izomorfní se $\mathbb{Z}$. Tedy máme $2 = 1 + 1 = \{1 \mid\}$, $3 = 2 + 1 = \{2 \mid\}, \ldots$ a obecně $n + 1 = \{n \mid\}$ a $-(n+1) = \{\mid -n\}$.

Další příklady mohou být þ○● $= \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, þ○● + þ○● + þ● $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$, þ○●● $= \frac{1}{4}$ nebo þ○●●●●● $= \frac{1}{32}$. Rovnost $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ lze jednoduše dokázat pomocí rozdílu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$, ve kterém vyhraje druhý hráč. Čísla s větším jmenovatelem dostaneme podobnou konstrukcí: $\frac{1}{2^{n+1}} = \left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^n}\right\}$ a taková čísla generují podgrupu her izomorfní s grupou $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, tj. grupou dyadických racionálních čísel: $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{q \in \mathbb{Q};\ 2^n q \in \mathbb{Z} \text{ pro nějaké } n \geqslant 0\}$. Kanonická forma $m/2^n$ (zkrácený tvar) je $\frac{m}{2^n} = \left\{\frac{m-1}{2^n} \;\middle|\; \frac{m+1}{2^n}\right\}$. Induktivní struktura čísel se nejlépe zrcadlí na obrázku 2.5. Pro každé n je právě 2^n čísel vzniklých v den n. Například þ○○● $= \{0,$ þ○ $\mid$ þ○○$\} = \{0, 1 \mid 2\} = \{1 \mid 2\} = \frac{3}{2}$.



Obrázek 2.5. Geneze nadreálných čísel, viz [11] a [7].

Je-li x číslo, potom žádnému hráči se nechce v x zahrát jako první, protože ztrácí výhodu (tzv. studená hra), tedy $x^L < x < x^R$ pro každé x^L a x^R.

Začneme definicí následujících krátkých her: Připomeňme, že $0 \cong \{\mid\}$. Dále definujeme $[1] = \{0 \mid\}$. Můžeme si představit $[1]$ jako hru, ve které má levá strana výhodu v hodnotě 1 tahu. Při hraní rozdílové hry vidíme, že $[1] = \{0 \mid [1]\} + \{0 \mid [1]\}$. Z toho vyplývá, že definujeme $\left[\frac{1}{2}\right] = \{0 \mid [1]\}$. Podobně vidíme, že $\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{0 \mid \left[\frac{1}{2}\right]\right\} + \left\{0 \mid \left[\frac{1}{2}\right]\right\}$. Proto definujeme $\left[\frac{1}{4}\right] = \left\{0 \mid \left[\frac{1}{2}\right]\right\}$. To naznačuje obecnější definici:

Definice 2.38. Pro libovolné nezáporné celé číslo n definujeme $\left[\frac{1}{2^n}\right]$ vztahem $\left[\frac{1}{2^n}\right] = \left\{0 \mid \left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]\right\}$.

Všimněme si, že $\left[\frac{1}{2^n}\right]$ je ostře větší než 0, a to indukcí.

Lemma 2.39. $\left[\frac{1}{2^n}\right]+\left[\frac{1}{2^n}\right]=\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ *pro libovolné celé číslo* $n\geqslant 1$.

Důkaz. Ukážeme, že ve hře $\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]$ vyhraje druhý hráč. Předpokládejme, že Levý táhne jako první. Pokud Levý táhne dále $\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, pak se pravá strana nutně pohybuje na jednom z $-\left[\frac{1}{2^n}\right]$, která je záporná. Na druhou stranu levá strana může otevřít přesunem do polohy $\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]=-\left[\frac{1}{2^n}\right]$, která je záporná. Z toho můžeme vyvodit, že Levý nemůže vyhrát, pokud začínal. Dále ukážeme, že pRavý nemůže vyhrát, když táhne jako první. Pokud pravá strana postupuje dále $\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, pak výsledná hra je $\left[\frac{1}{2^{n-2}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]$. Indukcí, $\left[\frac{1}{2^{n-2}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]=\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]=\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]+\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{1}{2^n}\right]>0$. Na druhou stranu pRavý může hru otevřít tím, že se přesune na $-\left[\frac{1}{2^n}\right]$. Výsledná hra je $\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]+0-\left[\frac{1}{2^n}\right]$. Levá strana vyhrává přesunem do $\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]+0-\left[\frac{1}{2^{n-1}}\right]=0$. Z toho vyplývá, že nemůže zvítězit, pokud táhne jako první. Z toho můžeme vyvodit požadovanou rovnost. □

Lemma 2.40. *Nechť* A,B *jsou posety. Je-li* $f\colon A\to B$ *zobrazení, které respektuje částečné uspořádání, pak je* f *injektivní.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f(x)=f(y)$. Pak $f(x)\geqslant f(y)$ a $f(x)\leqslant f(y)$. Protože f respektuje částečné uspořádání, máme $x\geqslant y$ a $x\leqslant y$. Ekvivalentně $x=y$. To ukazuje, že f je injektivní. □

Věta 2.41. *Existuje injektivní grupový homomorfismus z* $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ *do* $\mathbb{G}$.

Důkaz. Pro liché a definujeme zobrazení f pomocí $\frac{a}{2^b}\to a\left[\frac{1}{2^b}\right]$, kde $a\left[\frac{1}{2^b}\right]=\underbrace{\left[\frac{1}{2^b}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2^b}\right]}_{a\text{ krát}}$ Nechť $\frac{a}{2^b},\frac{m}{2^n}\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. Pak $\frac{a}{2^b}+\frac{m}{2^n}$ se zobrazí na $(a2^{n-b}+m)\left[\frac{1}{2^n}\right]=a2^{n-b}\left[\frac{1}{2^n}\right]+m\left[\frac{1}{2^n}\right]=a\left[\frac{1}{2^b}\right]+m\left[\frac{1}{2^n}\right]$. Poslední rovnost je pravdivá, protože opakovaná aplikace lemmatu 2.39 ukazuje $2^{n-b}\left[\frac{1}{2^n}\right]=\left[\frac{1}{2^b}\right]$. Z toho můžeme vyvodit, že f je grupový homomorfismus. Navíc toto zobrazení respektuje částečné uspořádání G. Proto je f také injektivní. □

Nyní můžeme ztotožnit hru $a\left[\frac{1}{2^b}\right]$ s dyadickou racionální hrou $\frac{a}{2^b}$. Z tohoto důvodu nyní upustíme od zápisu v závorkách.

Definice 2.42. Nechť $I\subset\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. Pak I je interval, jestliže pro libovolné $x,y\in I$ s $x>y$ máme $z\in I$ pro všechna z taková, že $x>z>y$.

Definice 2.43. Nechť G je krátká hra. Definujme narozeniny G, označené $\mathfrak{b}(G)$, jako nejmenší celé číslo n takové, že $G\in\mathbb{G}_n$. Pro úplnost definujeme také formální narozeniny G, označené $\tilde{\mathfrak{b}}(G)$, jako nejmenší celé číslo n takové, že $G\in\widetilde{\mathbb{G}}_n$.

Všimněte si, že $\mathfrak{b}(G)$ se zajímá pouze o herní hodnotu G, zatímco $\tilde{\mathfrak{b}}(\mathbb{G})$ se zajímá o strukturu G, tj. o její možnosti.

Lemma 2.44. *Nechť* $\frac{a}{2^b}\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, *kde* a *je liché. Pak* $\frac{a}{2^b}=\left\{\frac{a-1}{2^b}\;\middle|\;\frac{a+1}{2^b}\right\}$ *je kanonický tvar* $\frac{a}{2^b}$.

Důkaz. Napíšeme $\frac{a}{2^b} = \underbrace{\frac{1}{2^b} + \frac{1}{2^b} + \cdots + \frac{1}{2^b}}_{a \text{ krát}}$ Připomeňme, že $\frac{1}{2^b} = \left\{0 \mid \frac{1}{2^{b-1}}\right\}$. Existuje tedy přesně jedna levá možnost, a to je $0 + \frac{1}{2^b} + \cdots + \frac{1}{2^b} = \frac{a-1}{2^b}$. Podobně existuje přesně jedna pravá možnost To je $\frac{1}{2^{b-1}} + \frac{1}{2^b} + \cdots + \frac{1}{2^b} = \frac{2}{2^b} + \frac{1}{2^b} + \cdots + \frac{1}{2^b} = \frac{a+1}{2^b}$. Můžeme dojít k závěru, že $\frac{a}{2^b} = \left\{\frac{a-1}{2^b} \mid \frac{a+1}{2^b}\right\}$. Všimněte si, že $\frac{a}{2^b}$ nemá žádné dominantní možnosti, protože by to vyžadovalo alespoň dvě levé strany nebo alespoň dvě pravé možnosti. Dále ukážeme $\frac{a}{2^b}$ nemá žádné reverzibilní možnosti. Pro přehlednost zápisu definujeme $G = \frac{a}{2^b}$. Všimněte si, že $\frac{a-1}{2^b} = \frac{a'}{2^{b'}}$ je v základním tvaru, kde a' je liché a $b' < b$. Víme, že $\frac{a'}{2^{b'}} = \left\{\frac{a-1}{2^b} - \frac{1}{2^{b'}} \,\middle|\, \frac{a-1}{2^b} + \frac{1}{2^{b'}}\right\}$. Z toho vyplývá, že $G^{LR} = \frac{a-1}{2^b} + \frac{1}{2^{b'}}$, kde $b' < b$. Proto platí $G^{LR} \geqslant \frac{a-1}{2^b} + \frac{1}{2^{b-1}} = \frac{a+1}{2^b} > G$. Z toho vyplývá, že G^L není reverzibilní přes G^{LR}. Z toho můžeme vyvodit, že G nemá reverzibilní levé možnosti. Podobným argumentem můžeme dokázat, že G nemá žádné reverzibilní pravé možnosti. Tím je dokázáno lemma. □

Lemma 2.45. *Je-li G v kanonické formě, pak $\tilde{\mathfrak{b}}(G) = \mathfrak{b}(G)$.*

Důkaz. Nechť $\tilde{\mathfrak{b}}(G) = n$. Je jisté, že herní hodnota G se vyskytuje ve formálním tvaru nebo před ním. $\tilde{\mathfrak{b}}(G) \geqslant \mathfrak{b}(G)$. Předpokládejme sporem, že $\tilde{\mathfrak{b}}(G) > \mathfrak{b}(G)$. Pak existuje krátká hra H taková, že $\mathfrak{b}(G) = \tilde{\mathfrak{b}}(H)$. Ale kanonická forma H, nazvěme ji K, se jistě narodila v době, kdy se H narodila. Takže $\mathfrak{b}(G) = \tilde{\mathfrak{b}}(H) \geqslant \tilde{\mathfrak{b}}(K)$. Ale $G \cong K$, protože kanonické formy jsou jedinečné, proto máme $\mathfrak{b}(G) \geqslant \tilde{\mathfrak{b}}(G)$. Podle našeho předpokladu to dává $\tilde{\mathfrak{b}}(G) > \mathfrak{b}(G) \geqslant \tilde{\mathfrak{b}}(G)$, což je spor. Můžeme tedy uzavřít, že $\tilde{\mathfrak{b}}(G) = \mathfrak{b}(G)$. □

Lemma 2.46. *Je-li G v kanonické formě, pak $\mathfrak{b}(G^L) < \mathfrak{b}(G)$ a $\mathfrak{b}(G^R) < \mathfrak{b}(G)$ pro všechny G^L, G^R.*

Důkaz. Nechť G^L a G^R jsou možnosti v G. Máme za to, že G je v kanonické formě. Z definice kanonické formy vyplývá, že všechny možnosti G jsou kanonické. Z toho vyplývá, že $\mathfrak{b}(G) = \tilde{\mathfrak{b}}(G) > \tilde{\mathfrak{b}}(G^L) = \mathfrak{b}(G^L)$, kde prostřední nerovnost vyplývá z naší rekurzivní konstrukce krátkých her. Podobný argument ukazuje, že $\mathfrak{b}(G^R) < \mathfrak{b}(G)$. □

Lemma 2.47. *Nechť $I \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ je neprázdný interval. Pak existuje jedinečné $x \in I$ z minimálních narozenin.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x, y \in I$ mají stejné narozeniny, řekněme n, a jsou v kanonické formě. Můžeme předpokládat, že $x > y$. Pak $x - y > 0$. Levý má tedy vyhrávající tah tvaru $x^L - y \geqslant 0$ nebo $x - y^R \geqslant 0$. V prvním případě máme $x > x^L \geqslant y$, z čehož vyplývá, že $x^L \in I$. V druhém případě, máme $x \geqslant y^R > y$, z čehož vyplývá, že $y^R \in I$. Poznamenejme, že x^L a y^R mají narozeniny ostře menší než n. Našli jsme tedy prvek s narozeninami ostře menšími než n. Opakováním tohoto postupu n-krát získáme jedinečný prvek s minimálními narozeninami. □

Věta 2.48 (Věta o jednoduchosti)**.** *Nechť G je krátká hra a definujme $I(G) = \{x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right];\ \forall G^L, G^R,\ G^L \lhd\!\!| \ x \lhd\!\!| \ G^R\}$. Pokud $I(G) \neq \varnothing$, pak $G = x$, kde x je jedinečný tvar, prvek v I s minimálními narozeninami.*

Důkaz. Předpokládejme, že $I(G) \neq \varnothing$, a nechť x je jedinečný prvek v $I(G)$ s minimálním datem narození. Ukážeme, že $G - x = 0$. Stačí ukázat, že v $G - x$ vyhraje druhý hráč. Předpokládejme, že Levý začíná. Levý má dvě možnosti: $G^L - x$, nebo $G - x^R$. Ale $G^L - x \lhd\!\!| \ 0$ podle naší definice $I(G)$, takže tento tah je pro Levého prohrávající. Na druhou stranu, $x^R \notin I(G)$, protože má ostře menší datum narozenin než x. Proto existuje levá možnost G taková, že $G^L \geqslant x^R$ nebo existuje pravá možnost G taková, že $G^R \leqslant x^R$. Pokud platí druhá možnost, pak má pRavý vítěznou variantu, totiž odpověď na $G - x^R$. Pokud pRavý začíná, pak $G^L \geqslant x^R > x$, což je v rozporu s tím, že $x \in I(G)$. Z toho můžeme vyvodit, že Levý nemůže vyhrát, když táhne jako první. Pomocí podobného argumentu můžeme usoudit že pRavý nemůže vyhrát, když táhne jako první. Z toho vyplývá, že $G = x$. □

Věta 2.49 (Pravidlo jednoduchosti)**.** *Nechť G je krátká hra a definujme $I(G) = \{x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right];\ \forall G^L, G^R,\ G^L \lhd\!\!| \ x \lhd\!\!| \ G^R\}$. Předpokládejme, že $I(G)$ není prázdný. Pak jedinečný prvek v $I(G)$ s minimálními narozeninami lze najít takto:*

1) Pokud $I(G)$ obsahuje celé číslo, pak x je celé číslo nejmenší velikosti.
2) V opačném případě je x jedinečný prvek minimálního jmenovatele.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $I(G)$ obsahuje kladné a záporné číslo. Pak $I(G)$ obsahuje 0 a jedinečným prvkem minimálního jmenovatele je 0. Proto můžeme předpokládat, že $I(G)$ obsahuje pouze kladná čísla. Předpokládejme, že $I(G)$ obsahuje celé číslo. Napíšeme celá čísla $I(G)$ ve vzestupném pořadí jako $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Máme $n_1 = \{n_1 - 1 \mid\}$. Ukážeme, že $G - n_1 = 0$. Předpokládejme, že první je Levý hráč. Má jedinou možnost: $G^L - n - 1$. Protože $n_1 \in I(G)$, máme $G^L - n_1 \lhd\!\!| \ 0$. PRavý si tedy může vynutit výhru. Předpokládejme, že pravá strana táhne jako první. Má dvě možnosti: $G^R - n_1$ a $G - (n_1 - 1)$. V prvním případě máme $G^R - n_1 \mid\!\!\rhd 0$, a tak si Levý může vynutit výhru. V druhém případě máme $n_1 - 1 \notin I(G)$. Proto můžeme najít takovou levou možnost, že $G^L \geqslant n_1 - 1$, nebo můžeme najít pravou variantu takovou, že $G^R \leqslant n_1 - 1$. Druhý případ nemůže nastat, protože by to znamenalo, že $G^R \leqslant n - 1 < n$. Musíme tedy mít $G^L - (n_1 - 1) \geqslant 0$. To ukazuje, že Levý má vítěznou odpověď na $G - (n_1 - 1)$. Z toho můžeme vyvodit závěr $G = n_1$.

Nyní předpokládejme, že $I(G)$ neobsahuje žádná celá čísla. Nechť $x = \frac{a}{2^b}$ je jedinečný prvek minimálního jmenovatele. Nejprve dokážeme, že takový prvek existuje. Za tímto účelem ukážeme, že pokud existují dva různé prvky se stejným jmenovatelem v $I(G)$, pak můžeme najít prvek v $I(G)$ s ostře menším jmenovatelem. Předpokládejme, že $\frac{m}{2^n}$ a $\frac{m+k}{2^n}$ jsou prvky v $I(G)$, v základním tvaru. Je-li $k \geqslant 2$, pak $(m+1)/2^n \in I(G)$. Na druhé straně, je-li $k = 1$, pak buď $m/2^n$ nebo $(m+k)/2^n$ není v základním tvaru. To dokazuje tvrzení.

Nyní ukážeme $G - x = 0$. Předpokládejme, že Levý táhne první. Má dvě možnosti: $G^L - x$ a $G - x^R$. Protože $G^L \lhd\!\!| \ x$, máme, že pRavý má vítěznou odpověď na $G^L - x$. Co se týče $G - x^R$, protože x^R je číslo ostře menšího jmenovatele než x, máme $x^R \notin I$. Pak můžeme najít takovou variantu G, že $G^L \geqslant x^R$ nebo $G^R \leqslant x^R$. První z nich však implikuje $G^L \geqslant x^R > x$, což je spor. Takže musíme mít $G^R - x^R \leqslant 0$, což ukazuje, že pRavý má vítěznou odpověď na $G - x^R$. Podobně se ukazuje, že pRavý nemůže vyhrát, když táhne jako první. Z toho můžeme vyvodit, že v $G - x$ vítězí druhý hráč, tj. $G = x$. □

Podle předcházející věty dostaneme: $\{-2 \mid 5\} = 0$, $\left\{\frac{1}{2} \mid 3\right\} = 1$, $\left\{\frac{1}{8} \mid \frac{5}{8}\right\} = \frac{1}{2}$ a $\left\{\frac{1}{2} \mid \frac{7}{8}\right\} = \frac{3}{4}$.

Příklad 2.50. Budeme hledat hodnotu hry $G = \left\{\frac{1}{4} \mid 2\right\}$. Prvním kandidátem hodnoty je číslo mezi levou a pravou částí G, může to být aritmetický průměr $\frac{x+y}{2}$. Ptejme se tedy, zda $G - \frac{9}{8} = 0$. Tuto hypotézu vyvrátíme: Podle definice dyadického zlomku platí $\frac{9}{8} = \left\{\frac{8}{8} \mid \frac{10}{8}\right\} = \left\{1 \mid \frac{5}{4}\right\}$. Dokázat (nebo vyvrátit) v naší teorii hypotézu znamená zahrát si hru. Jak se asi bude hrát $\left\{\frac{1}{4} \mid 2\right\} + \left\{-\frac{5}{4} \mid -1\right\}$? Začne-li pRavý hráč, asi nezahraje do hry 2, ale spíše zahraje do hry -1. Hra se posune do postavení $\left\{\frac{1}{4} \mid 2\right\} + \{\mid 0\}$. Levý hráč je donucen zahrát do $\frac{1}{4}$. Ve hře $\frac{1}{4} - 1 < 0$ existuje vítězná strategie pro pRavého hráče a tedy hra $G - \frac{9}{8}$ není nulová. Musíme tedy vybrat jiného kandidáta pro hodnotu hry G. Nabízí se vybrat krajní body hry $\frac{5}{4}$. Vezmeme jednodušší číslo 1 a budeme vyšetřovat, zda $G - 1 = 0$, tj. zda ve hře $G - 1$ existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Zahrajme si tedy hru $\left\{\frac{1}{4} \mid 2\right\} + \{\mid 0\}$. Začne-li Levý hráč, nemůže zahrát ve druhé hře a bude hrát do hry $\frac{1}{4}$. Hra se posune do pozice $\frac{1}{4} - 1 < 0$, kde existuje vítězná strategie pro pRavého hráče. Začne-li ve hře $G - 1$ naopak pRavý hráč, může zahrát do nuly (není výhodné, Levý odpoví do $\frac{1}{4}$), nebo do 2, a hra bude pokračovat hrou $2 - 1 = 1 > 0$, ve které opět existuje vítězná strategie pro Levého hráče. Tedy ve hře $G - 1$ existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Odtud získáváme $G = 1$.

Věta 2.51. *Je-li G číslo, pak $I(G)$ není prázdné. Zejména je-li G číslo, pak G je dyadické racionální číslo.*

Důkaz. Předpokládejme, že G je číslo. Pak každá možnost G je číslo. Indukcí zjistíme, že můžeme předpokládat, že $I(G^L)$ a $I(G^R)$ jsou neprázdné pro každou možnost G. Podle jednoduchosti je každé G^L a G^R dyadické racionální číslo. Protože G je krátká, musí mít konečně možností. Proto můžeme najít maximum G^L a minimum G^R. Označme je jako $G^L = \frac{a}{2^b}$ a $G^R = \frac{c}{2^d}$, kde a, c jsou liché. Pak $x = \frac{G^L + G^R}{2}$ je dyadické racionální číslo mezi nimi. Konkrétně $G^L < x < G^R$ pro všechny možnosti G. Můžeme uzavřít, že $I(G)$ je neprázdná. □

Ukázali jsme, že pokud je G krátká hra a číslo, pak je G dyadické racionální číslo. Obecně však může být $I(G)$ prázdná. V takovém případě G není číslo. Některé příklady ne-čísla jsou $\{56 \mid -56\}$, $\{0 \mid 0\}$ a $\{0 \mid \{0 \mid 0\}\}$. Poslední dvě hry se obvykle označují jako $*$ a $\uparrow$.

3. Dyadická racionální čísla

Po nezbytném teoretickém stručném úvodu CGT (teorie kombinatorických her) se budeme dále věnovat především dyadickým racionálním číslům a jejich aplikaci na hru Hackenstring. Naše dyadická racionální čísla se také označují $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Jedná se o obor integrity celých čísel s adjungovaným prvkem $\frac{1}{2}$. Je to nejmenší podobor integrity tělesa racionálních čísel $\mathbb{Q}$ (ve smyslu inkluze) obsahující současně všechna celá čísla a číslo $\frac{1}{2}$. Díky konstrukci dyadických čísel je jich spočetně. Z druhé strany jedná se o podmnožinu spočetné množiny všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$, tedy $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ je spočetná.

Poznámka 3.1. Uvažujme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ a zavedeme relaci $\cong$ takto:

1) $(a, b) \cong (a', b') \Leftrightarrow a \cdot 2^{b'} = a' \cdot 2^{b}$.

Relace $\cong$ je na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ekvivalence, tj. relací reflexivní, symetrickou a tranzitivní. Tato relace vytváří rozklad $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\cong}$ na třídy. Typická třída rozkladu je $T_{(a,b)} = \{(a', b');\ (a, b) \cong (a', b')\}$, druhý obor relace $\cong$ příslušný k prvku (a, b). Na třídách rozkladu definujme dvě binární operace:

2) $T_{(a,b)} \oplus T_{(a',b')} = T_{(a \cdot 2^{b'} + a' \cdot 2^{b}, b+b')}$,
3) $T_{(a,b)} \otimes T_{(a',b')} = T_{(aa', b+b')}$.

Operace $\oplus, \otimes$ jsou dobře definovány, nezáleží na reprezentantech tříd. Označme $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{2}\big] = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\cong}$. Zobrazení $f \colon \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\cong}$ definujeme takto: $f(a) = T_{(a,0)}$. Toto zobrazení je homomorfismus. Tradičně píšeme $T_{(a,b)} = \frac{a}{2^b}$.

4) Pomocí struktury $(\mathbb{Z}, <)$ definujeme $\prec$ na třídách takto: $T_{(a,b)} \prec T_{(a',b')} \Leftrightarrow a \cdot 2^{b'} < a' \cdot 2^{b}$.

Strukturu $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{2}\big] = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_{\cong}$ nazýváme oborem dyadických racionálních čísel, podobně vznikají i p-adická čísla, speciálně desetinná (racionální) čísla.

Absolutní hodnotu získáme takto: $|T_{(a,b)}| = T_{(|a|,b)}$.

Příklad 3.2. Platí následující tvrzení: *Dyadická racionální čísla jsou hustá v reálných číslech.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a < b$, a a b jsou reálná čísla. Díky Archimédovu axiómu existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$0 < \frac{1}{n} < b - a,$$

což znamená, že

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < b - a.$$

Platí

$$1 < 2^n b - 2^n a$$

a tedy existuje celé číslo m takové, že

$$2^n a < m < 2^n b,$$

tj.

$$a < \frac{m}{2^n} < b.$$

Tedy dyadická racionální čísla jsou hustá v $\mathbb{R}$ (mezi každými dvěma různými reálnými čísly leží alespoň jedno dyadické racionální číslo). □

Pozorování 3.3. *Nechť $x > 0$; $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], x \notin \mathbb{Z}$ (kladné necelé dyadické racionální číslo x). Potom x se může zapsat jednoznačně ve tvaru*

$$x = 1 + 1 + \cdots + 1 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^n}.$$

Důkaz. Uvažujme $\frac{a}{2^n} > 0$ v základním tvaru, tedy $a > 0$, a je liché, $n > 0$. Potom $a-1$ a $a+1$ jsou sudá. Jedno z nich je dokonce dělitelné čtyřmi. Bez újmy na obecnosti, nechť $4|(a-1)$. Pro $n = 1$ dostaneme $\frac{a}{2}$ a je jasné, že je pouze jeden způsob zápisu x v požadovaném tvaru.

Nechť nyní $n > 1$. Jistě platí $4 \nmid (a+1)$. Potom

$$\frac{a+1}{2^n} = \frac{\frac{a+1}{2}}{2^{n-1}}.$$

Podle indukční hypotézy lze to napsat jednoznačně v odpovídajícím tvaru,

$$\frac{a+1}{2^n} = \frac{\frac{a+1}{2}}{2^{n-1}} = x = 1 + 1 + \cdots + 1 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Potom ale

$$x = \frac{a}{2^n} = 1 + 1 + \cdots + 1 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}.$$

Na konci musíme odečíst, protože po předání bychom dostali $\frac{a-1}{2^n}$ jako výraz s $\frac{1}{2^{n-1}}$, což by bylo v rozporu s tvrzením $4|(a-1)$. Z konstrukce je zřejmé, že vyjádření je jednoznačné. □

Nyní můžeme pro každé dyadická racionální číslo definovat odpovídající hru Hackenstring. Pro každé $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Pro $x > 0$ nasčítáme 1, které odpovídají počátečnímu segmentu hry Hackenstring, první čeRný kámen označíme $-\frac{1}{2}$ a dále píšeme $\frac{1}{2^i}$ se znaménkem $-$ a $+$, které odpovídají následujícím čeRným a bíLým kamenům. Analogicky postupujeme i pro $x < 0$.

Příklad 3.4. $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, odpovídající hra Hackenstring je |○○○●○.

Jiné metody jsou uvedeny na straně 59 a 58.

Pozorování 3.5. *Zobrazení $x \to [x]$ zachovává uspořádání.*

Zlomky můžeme také psát ve tvaru

$$\left[\frac{a}{2^n}\right] = \left\{\left[\frac{a-1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[\frac{a+1}{2^n}\right]\right\}.$$

To je také nová definice této hry a navíc v kanonickém tvaru.

Věta 3.6. *Pro $x, y \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ platí $[x+y] = [x] + [y]$.*

Důkaz. Případ 1 pro $x, y \in \mathbb{Z}$ jsme již ověřili.

Případ 2. Uvažujme $x \in \mathbb{Z}$, $y \notin \mathbb{Z}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x je kladné (pro $x = 0$ je tvrzení triviální). Potom:

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &= \{[x-1] \mid \} + \left\{ \left[\frac{a-1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[\frac{a+1}{2^n}\right] \right\} \\
&= \left\{ [x-1] + [y], [x] + \left[\frac{a-1}{2^n}\right] \,\middle|\, [x] + \left[\frac{a+1}{2^n}\right] \right\} \\
&= \left\{ [x+y-1], \left[x+y-\frac{1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[x+y+\frac{1}{2^n}\right] \right\} \\
&= \left\{ \left[x+y-\frac{1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[x+y+\frac{1}{2^n}\right] \right\} = [x+y].
\end{aligned}$$

Podobně pro $y \in \mathbb{Z}$.

Případ 3. Nechť x, y nejsou celá čísla. Označme $x = \frac{a}{2^n}$ a $y = \frac{b}{2^m}$ a nejdříve předpokládejme, že $n > m$. Pak

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &= \left\{ \left[x - \frac{1}{2^n}\right] + [y], [x] + \left[y - \frac{1}{2^m}\right] \,\middle|\, \dots \right\} \\
&= \left\{ \left[x+y-\frac{1}{2^n}\right], \left[x+y-\frac{1}{2^m}\right] \,\middle|\, \dots \right\} \\
&= \left\{ \left[x+y-\frac{1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[x+y+\frac{1}{2^n}\right] \right\} \\
&= [x+y].
\end{aligned}$$

Konečně uvažme také případ $n = m$. Ukážeme, že platí

$$[x] + [y] = \left\{ \left[x+y-\frac{1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[x+y+\frac{1}{2^n}\right] \right\}.$$

Tento případ vyžaduje více kontrol, protože toto není kanonický tvar $x + y$. Číslo $x + y$ má menší jmenovatel než 2^n. Víme, že

$$z = \left\{ \left[x+y-\frac{1}{2^n}\right] \,\middle|\, \left[x+y+\frac{1}{2^n}\right] \right\}$$

je číslo, které je nejjednodušší a leží mezi (levou a pravou možností). Číslo $x + y$ samozřejmě splňuje vhodné nerovnosti, ale předpokládejme, že z je nyní opravdu nejjednodušší. Potom z získáme pro výraz $x + y$, kde $|z - (x + z)| \geqslant \frac{1}{2^k}$, kde $\frac{1}{2^k}$ je jmenovatelem $x + y$ a tedy $\frac{1}{2^k} \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Všimněte si, že z a $x + y$ se snaží ležet v otevřeném intervalu, jehož délka je přesně $\frac{1}{2^{n-1}}$, což není možné. Proto $z = x + y$. □

Závěr 3.7. *Vytvořili jsme izomorfismus uspořádané Abelovy grupy* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ *do čísel.*

3.1. Dyadická reprezentace racionálních čísel

Nechť a je nenulové přirozené číslo. Díky algoritmu opakovaného dělení se zbytkem lze a reprezentovat ve tvaru

$$a = \sum_{j=0}^{l} q_j 2^j, \tag{3.1}$$

s přirozenými čísly $0 \leqslant q_j \leqslant 1$ pro $j = 0, \ldots, l$ a $q_l \neq 0$. Pro takový součet (3.1) zavádíme dyadickou (dvojkovou) reprezentaci

$$a = q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0.$$

Dyadický zápis lze jednoduše rozšířit pro celá čísla. Je-li celé číslo a záporné, potom $a = -|a|$. Tedy dyadická reprezentace celého čísla $|a|$ bude dyadická reprezentace a tvaru

$$a = -q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0.$$

Naše pozorování nyní rozšíříme na všechna racionální čísla a jejich dyadickou reprezentaci (tvar). Takže budeme předpokládat, že $\frac{a}{b}$ reprezentuje racionální číslo; $a, b \in \mathbb{Z}$ a $b \neq 0$. Bez ohledu na obecnost budeme dále předpokládat, že $b > 0$. Použijeme-li algoritmus dělení se zbytkem na celá čísla, pro a, b najdeme celá čísla q, r taková, že $0 \leqslant r < b$ tak, že

$$a = q \cdot b + r \Leftrightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Pro kladné celé číslo q získáme dyadickou reprezentaci

$$q = \sum_{j=0}^{l} q_j 2^j = q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0$$

a pro záporné $-q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0$. Tedy

$$q = \pm q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0.$$

Nyní předpokládejme dyadickou reprezentaci racionálního čísla $0 \leqslant \frac{r}{b} < 1$. Také můžeme zapsat jako

$$\frac{r}{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot r}{b}. \tag{3.2}$$

Zaměříme se na podíl $\frac{2 \cdot r}{b}$ se zbytkem. Získáme přirozená čísla q_{-1}, r_{-1}, taková, že $0 \leqslant r_{-1} < b$ a platí

$$2 \cdot r = q_{-1} \cdot b + r_{-1} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot r}{b} = q_{-1} + \frac{r_{-1}}{b}. \tag{3.3}$$

Z nerovnosti $\frac{r}{b} < 1$ získáme:

$$0 \leqslant q_{-1} = \frac{2 \cdot r}{b} - \frac{r_{-1}}{b} < \frac{2 \cdot r}{b} < 2,$$

tak, že $0 \leqslant q_{-1} \leqslant 1$. Dosadíme-li (3.3) do (3.2), dostaneme

$$\frac{r}{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot r}{b} = \frac{1}{2}\left(q_{-1} + \frac{r_{-1}}{b}\right) = \frac{q_{-1}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_{-1}}{b} = \frac{q_{-1}}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot r_{-1}}{b}.$$

Je-li $r_{-1} \neq 0$, vydělíme (opět) $2 \cdot r_{-1}$ se zbytkem b a získáme přirozená čísla q_{-2}, r_{-2}, taková, že $0 \leqslant r_{-2} < b$ taková, že

$$2 \cdot r_{-1} = q_{-2} \cdot b + r_{-2} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot r_{-1}}{b} = q_{-2} + \frac{r_{-2}}{b}.$$

Tak jako dříve, $0 \leqslant q_{-2} \leqslant 1$ a spojíme-li naše výsledky, dostaneme

$$\frac{r}{b} = \frac{q_{-1}}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot r_{-1}}{b} = \frac{q_{-1}}{2} + \frac{1}{2^2}\left(q_{-2} + \frac{r_{-2}}{b}\right) = \frac{q_{-1}}{2} + \frac{q_{-2}}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{2 \cdot r_{-2}}{b}.$$

Budeme-li postupovat dál, získáme přirozená čísla q_{-3}, r_{-3}, taková, že $0 \leqslant q_{-3} \leqslant 1$ a $0 \leqslant r_{-3} < b$ a platí

$$\frac{r}{b} = \frac{q_{-1}}{2} + \frac{q_{-2}}{2^2} + \frac{q_{-3}}{2^3} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot r_{-3}}{b}.$$

Po k krocích získáme přirozená čísla q_{-k}, r_{-k} taková, že $0 \leqslant q_{-k} \leqslant 1$ a $0 \leqslant r_{-k} < b$ a platí

$$\frac{r}{b} = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_{-j}}{2^j} + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2 \cdot r_{-k}}{b}.$$

Tímto postupem získáme dvě možnosti. Buď existuje $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ tak, že $r_{-k} = 0$, nebo zbytek r_{-j} je vždy nenulový pro všechna $j = 1, 2, 3, \ldots$

Definice 3.8. S označením viz výše definujeme pro $a, b \in \mathbb{Z}$ a $b \neq 0$ dyadickou reprezentaci následovně:

1) Je-li $r = 0$ nebo existuje $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ a $r_{-k} = 0$ položíme

$$\pm q_l \ldots q_0{,}q_{-1} \ldots q_{-k} := \pm \sum_{j=-l}^{k} \frac{q_{-j}}{2^j}$$

a $\pm q_l \ldots q_0{,}q_{-1} \ldots q_{-k}$ nazýváme dyadickou (binární, dvojkovou) reprezentaci nebo dyadickým rozvojem racionálního čísla $\frac{a}{b}$.

2) Pokud všechny zbytky r_{-j} jsou nenulové, položíme formálně

$$\pm q_l \ldots q_0{,}q_{-1} \ldots q_{-k} \ldots := \pm \sum_{j=-l}^{\infty} \frac{q_{-j}}{2^j}$$

a $\pm q_l \ldots q_0{,}q_{-1} \ldots q_{-k} \ldots$ stejně nazýváme dyadickou (binární, dvojkovou) reprezentaci nebo dyadickým rozvojem racionálního čísla $\frac{a}{b}$.

Definice 3.9. Nekonečný dyadický rozvoj $\pm q_l \ldots q_0{,}q_{-1} \ldots q_{-k} \ldots$ nazýváme periodickým, pokud existují přirozená čísla $v \geqslant 0$ a $p > 0$ taková, že $q_{-(v+j)} = q_{-(v+j+p)} = q_{-(v+j+2p)} = \cdots$ pro $j = 1, 2, \ldots, p$. Píšeme zjednodušeně pruh nahoře pro periodu:

$$\pm q_l \ldots q_0{,}q_{-1} \ldots q_{-v}\overline{q_{-(v+1)} \cdots q_{-(v+p)}}.$$

Nejmenší takové p se nazývá perioda dyadického rozvoje racionálního čísla $\frac{a}{b}$.

Nekonečná dyadická reprezentace racionálního čísla je periodická.

Věta 3.10. *Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Je-li dyadický rozvoj racionálního čísla $\frac{a}{b}$ nekončící, potom je periodický.*

Důkaz. Předpokládejme, že racionální číslo $\frac{a}{b}$ nemá konečný dyadický rozvoj. Podle konstrukce dyadického rozvoje čísla $\frac{a}{b}$ získáváme nekonečnou posloupnost zbytků $r_0 := r, r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}, \ldots$, ovšem všechny jsou podmnožinou $\{0, \ldots, b-1\}$. Odtud jistě musí existovat dva zbytky r_{-j_1} a r_{-j_2} tak, že jsou identické. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j_2 > j_1 \geqslant 0$ a pro pevně zvolené j_1 vybereme minimální rozdíl $p := j_2 - j_1$. Díky algoritmu získání dyadického rozvoje čísla $\frac{a}{b}$, získáme

$$\begin{aligned} r_{-j_1} &= r_{-(j_1+p)} = r_{-(j_1+2p)} = \cdots, \\ r_{-(j_1+1)} &= r_{-(j_1+1+p)} = r_{-(j_1+1+2p)} = \cdots, \\ &\vdots \\ r_{-(j_1+p-1)} &= r_{-(j_1+2p-1)} = r_{-(j_1+3p-1)} = \cdots. \end{aligned}$$

Díky tomu, že jsme vybrali j_1 minimální, dostáváme tvrzení věty. □

3.2. Další vlastnosti dyadických racionálních čísel

V dalším kroku prozkoumáme hru

$$G = þ●●.$$

Když napíšeme možnosti hry G, dostaneme $G = \{0 \mid 1/2, 1\}$. Podle pravidla o zjednodušení můžeme odstranit 1, takže $G = \{0 \mid 1/2\}$. Trocha práce by vás měla přesvědčit, že $G + G + (-1/2) = 0$ (tj. je to výhra druhého hráče). Definujme tedy $1/4 = \{0 \mid 1/2\}$.

Obecněji uvažujme následující hru Hackenstring:

$$þ●●●●\cdots●$$

Rádi bychom označili $G_n = 1/2^n$. K tomu potřebujeme ukázat, že $G_n + G_n = G_{n-1}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$. Důkaz provedeme indukcí.

Důkaz. Předpokládejme, že již víme, že $G_n + G_n = G_{n-1}$ pro $n = 1, 2, \ldots, t-1$. Pak pro $n = t$ máme

$$G_t = \{0 \mid G_0, G_1, G_2, \ldots, G_{t-1}\}.$$

Je snadné vidět, že $G_0 > G_1 > G_2 > \cdots$ (není to tak těžké, takže to necháme jako cvičení), takže hra se zjednoduší na $G_t = \{0 \mid G_{t-1}\}$. Zbývá tedy ukázat, že

$$\{0 \mid G_{t-1}\} + \{0 \mid G_{t-1}\} + (-G_{t-1}) = 0.$$

Všimněte si, že $-G_{t-1} = \{-G_{t-2} \mid 0\}$. Důkaz, že ve výše uvedené hře zvítězí druhý hráč:

- Předpokládejme, že začíná Levý hráč.
  - Pokud Levý vezme z $\{0 \mid G_{t-1}\}$ 0, pak pRavý může vzít z $\{0 \mid G_{t-1}\}$ G_{t-1}, čímž ponechá součet 0 a vyhraje.
  - Pokud Levý vezme z $(-G_{t-1})$ $(-G_{t-2})$, pak pRavý vezme z $\{0 \mid G_{t-1}\}$ G_{t-1}. Podle indukční hypotézy $G_{t-1} - G_{t-2} = -G_{t-2}$, takže hra je nyní $G_t - G_{t-2} < 0$. PRavý vyhrává.
- Předpokládejme, že začíná pRavý.

– Pokud pRavý vezme z $\{0 \mid G_{t-1}\}$ G_{t-1}, Levý vezme ze hry $\{0 \mid G_{t-1}\}$ 0, tedy ponechá 0 a vyhraje.
– Pokud pRavý vezme $(-G_{t-1})$ 0, pak Levý vezme z $\{0 \mid G_{t-1}\}$. 0. To dává $\{0 \mid G_{t-1}\} = G_t$, která je jednoznačně kladná. Levý tedy vyhrává.

Tím je důkaz dokončen. □

Na závěr můžeme označit $G_n = 1/2^n$. Formálně dostaneme následující rekurzivní definici:

$$1/2 = \{0 \mid 1\},\ 1/4 = \{0 \mid 1/2\},\ 1/8 = \{0 \mid 1/4\},\ 1/16 = \{0 \mid 1/8\}, \dots$$

Nyní máme tendenci si naivně myslet, že můžeme prostě brát průměry $\{a \mid b\} = \frac{a+b}{2}$. Bohužel to neplatí obecně, jak ukazují následující příklady.

3.2.1. Příklady.

1) Uvažujme hru $G = \{-5 \mid 2\}$. Pokud začíná Levý, nechává záporné číslo a vyhrává pRavý. Pokud začne pRavý, nechá kladné číslo a Levý vyhrává. Vyhrává tedy druhý hráč. To znamená, že $G = 0$.
2) Uvažujme $G = \{1/4 \mid 1\}$. Tvrdíme, že $G = 1/2$. Ve skutečnosti stačí ukázat, že v $G - 1/2 = G + \{-1 \mid 0\}$ vyhraje 2. hráč. To je ale snadné, důkaz přenecháme čtenáři.

I přes tento drobný neúspěch můžeme v některých případech brát průměry.

Je-li p celé číslo a m nezáporné celé číslo, pak:

$$\left\{ \frac{p}{2^m} \,\middle|\, \frac{p+1}{2^m} \right\} = \frac{2p+1}{2^{m+1}}.$$

Důkaz. Nejprve uvažujme případ $2p+1 > 0$. Zapišme pravou stranu jako součet $(2p+1)$ členů, z nichž každý je roven $1/2^{m+1} = \{0 \mid 1/2^m\}$. Pokud tedy v tomto herním součtu začíná Levý, nemá jinou možnost než hrát $\{0 \mid 1/2^m\}$. Stejně tak, pokud začíná pRavý, je jeho jediným tahem z $\{0 \mid 1/2^m\}$ do $1/2^m$. Uvážíme-li tyto možnosti, dostaneme hru $\left\{\frac{2p}{2^{m+1}} \,\middle|\, \frac{2p}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^m}\right\}$, což je přesně levá strana. Případ, kdy $2p+1 < 0$, je podobný a je ponechán na čtenáři. □

3.2.2. Analýza. Půjde nám především o to, abychom zjistili, pro kterého hráče je daná hra výhodná. Koncová pozice pozice je výhodná pro druhého hráče v normální variantě hry. Začínající hráč nemůže táhnout. Množina tahů je tedy $\emptyset$, což také zapisujeme $\{|\}$, kde vlevo píšeme tahy bíLého a vpravo tahy čeRného, a označujeme 0. Je-li v jednom řádku jeden bíLý kámen $\flat$, čeRný hráč nemůže táhnout a bíLý hráč má výhodu jednoho tahu. Hra je tedy výhodná pro bíLého hráče. Takže možné tahy jsou $\{\flat\ |\} = 1$. Bude-li počáteční pozice tvořena dvěma bíLými kameny, třeba $\flat\circ$, bíLý může zahrát do 0 nebo do 1, zatímco čeRný hráč nemůže táhnout. Tuto situaci píšeme $\{0, 1 \mid\}$ a její hodnotu označujeme 2 (dva tahy k dobru pro bíLého hráče). Indukcí pro n bíLých kamenů získáme

$$n = \{0, 1, 2, \dots, (n-1) \mid\}.$$

Stejně jsme mohli postupovat pro čeRné kameny a získali bychom

$$-n = \{\mid 0, -1, -2, \dots, -(n-1)\}.$$

Nyní přidáme k n bíLým kamenům jeden čeRný $|\circ\ldots\circ\bullet$. Možné tahy jsou $\{0, 1, 2, \ldots, (n-1) \mid n\} = n - 1/2$. Přidáme k n bíLým kamenům dva čeRné $|\circ\ldots\circ\bullet\bullet$, dostaneme tyto možnosti $\{0, 1, 2, \ldots, (n-1) \mid n, n-1/2\} = n - 1/2 - 1/4$. Zleva můžeme vynechat všechny nevýhodné tahy a nechat tah s největší hodnotou, zprava obdobně vynecháme slabé tahy a necháme pouze nejmenší hodnotu. Tak dostaneme celkem přehledný zápis $\{n-1 \mid n-1/2\} = n - 1/2 - 1/4$. Přidáme-li vpravo jeden bíLý kámen, hodnota bude $n - 1/2 - 1/4 + 1/8$, atd.

3.2.3. Čísla $1/2^n$**.** Ve hře HACKENSTRING můžeme pozicím přiřadit jejich dyadická racionální čísla takto: $|\circ = 1$, $|\circ\bullet = 1/2$, $|\circ\bullet\bullet = 1/4$, $|\circ\bullet\bullet\bullet = 1/8$, …, $|\circ\bullet\cdots\bullet = 1/2^n$. Toto přiřazení je celkem přirozené (odhalíte pravidlo?).

3.2.4. Analýza $1/2$**.** Dyadickému racionálnímu číslu $1/2$ jsme přiřadili hodnotu hry $|\circ\bullet$. Pokud ukážeme, že $|\circ\bullet + |\circ\bullet + (-1) = 0$, tj. $|\circ\bullet + |\circ\bullet + |\bullet = 0$, tedy ve hře $|\circ\bullet + |\circ\bullet + |\bullet$ existuje vítězná strategie pro druhého hráče ($\rightsquigarrow 2$). Jak se bude asi hrát?

Začne-li pRavý hráč: Hráč nezahraje v poslední hře (tento tah může udělat i později) a zahraje v první (druhé) hře do postaveni $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\\\circ&\bullet\\\bullet&\end{smallmatrix}\right.$. Ze stejného důvodu Levý hráč, hráč na tahu, nezahraje svůj tah v první hře a zahraje ve druhé hře do postavení $\left|\begin{smallmatrix}\circ\\ \\\bullet\end{smallmatrix}\right.$ (odebere celý druhý řádek). V této pozici je na tahu pRavý hráč a prohraje. Tedy $R \rightsquigarrow L$.

Začne-li Levý z postavení $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet\\\circ&\bullet\\\bullet&\end{smallmatrix}\right.$ bude analýza podobná. Svým tahem se dostane hra do postavení $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet\\\bullet&\end{smallmatrix}\right.$, kde hraje pRavý. Hráč jistě neodebere celou poslední hromádku (proč?), ale zahraje do postavení $\left|\begin{smallmatrix}\circ\\\bullet\end{smallmatrix}\right.$ a vyhraje. Tedy ve hře $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet\\\circ&\bullet\\\bullet&\end{smallmatrix}\right. \rightsquigarrow 2$. Analogicky se postupuje i v případě $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\end{smallmatrix}\right.$ ($\rightsquigarrow 2$), atd.

Příklad 3.11. Víme, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Uvažujme nyní hru HACKENSTRING $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}\right.$ a porovnejme ji s hrou $\frac{1}{2} = |\circ\bullet$. Tedy budeme hrát hru $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}\right. + |\bullet\circ$.

Zahraje-li Levý do $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&\circ&\end{smallmatrix}\right.$, rychle prohraje, protože pRavý zahraje do nulové hry $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet\\\bullet&\circ\end{smallmatrix}\right.$. Tedy Levý zahraje jinak a po jeho tahu hry vypadá postavení tato: $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&&\end{smallmatrix}\right.$. Výhodnější pro pRavého hráče je odebrání nejpravější kámen, tedy zahraje do $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\\\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&&\end{smallmatrix}\right.$, kde Levý má méně tahů a také prohraje.

Obráceně: Začne-li pRavý, neodebere kámen z posledního řádku, což může udělat i později, ale dostane se do postavení $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\\\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&\circ&\end{smallmatrix}\right.$, kde okamžitě vyhraje Levý, protože první a třetí řádek je opačný (nulová hra) a druhý řádek začíná bíLým kamenem.

Tedy hra $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}\right. + |\bullet\circ$ je nulová a $\left|\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}\right. = -|\bullet\circ = |\circ\bullet = \frac{1}{2}$. Má-li $|\circ\bullet\bullet$ číselnou hodnotu, nutně $|\circ\bullet\bullet = \frac{1}{4}$.

Příklad 3.12. Ukážeme, že

$$|\circ\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n} + |\circ\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n} = |\circ\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}$$

přímo, indukcí a strategicky.

Je potřeba dokázat, že ve hře

$$\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n}+\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n}+\vert\bullet\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{n-1}$$

existuje vítězná strategie pro druhého hráče.

R: Začne pRavý. Nezačne určitě v poslední hře, tento tah může udělat kdykoliv později. Zahraje svůj optimální tah v první (druhé) hře a odebere svůj nejpravější kámen. Hra je tedy v postavení

$$\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}+\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n}+\vert\bullet\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{n-1}$$

Zde první a poslední hra je opačnou ($\rightsquigarrow 2$) a tedy Levý zahraje v druhé hře a vyhraje ($R \rightsquigarrow L$).

L: Levý hráč nezahraje v prvních dvou hrách (zde jistě vyhraje) a své tahy může udělat kdykoliv později (naopak, zahraje-li, prohraje). Zahraje tedy v poslední hře. Zde zahraje svůj nejlepší tah, tj. nejpravější a hra se posune do postavení:

$$\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}+\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n}+\vert\bullet\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{n-2}$$

a na tahu je pRavý hráč. Tento hráč nesebere svůj první kámen v poslední hře (prohrál by) a ve hrách

$$\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}+\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n}$$

si vybere svůj lepší tah.[3] Zahraje do pozice

$$\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}+\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}.$$

Tato pozice je díky indukčnímu předpokladu rovna hře

$$\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-2}$$

a prohraje.

Platí tedy věta:

Věta 3.13. *Pro $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

---

[3] $\flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n} = \left\{\vert \,\middle|\, \flat, \flat\bullet, \flat\bullet\bullet, \flat\bullet\bullet\bullet, \dots, \flat\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n-1}\right\} = \left\{0 \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \frac{1}{2^n}.$

Příklad 3.14. Vezměme hru (half) $h = \{0 \mid 1\}$ je číslo mezi 0 a 1. Ukážeme, že h je $1/2$. Spočítáme

$$\begin{aligned} 1 - h = 1 + (-h) &= 1 + (-\{0 \mid 1\}) = 1 + \{-1 \mid 0\} \\ &= \{0 - h, 1 + (-1) \mid 1 + 0\} = \{-h, 0 \mid 1\} \\ &\underbrace{=}_{h \text{ je kladná}} \{0 \mid 1\} = h, \end{aligned}$$

odtud $1 - h = h$ a tedy $h = 1/2$. Rovnice $1 = h + h$ má i netriviální řešení.

3.2.5. Hráč má výhodu $1/2^n$ tahu. Pomocí Conwayova formalismu (sendvičový princip) označujeme:

$$\begin{aligned} &|\!\circ \equiv \{0 \mid\} \equiv 1 && |\!\circ\bullet\bullet \equiv \{0 \mid 1/2, 1\} = \{0 \mid 1/2\} \equiv 1/4 \\ &|\!\circ\bullet \equiv \{0 \mid 1\} \equiv 1/2 && |\!\circ\bullet\bullet\bullet \equiv \{0 \mid 1/4, 1/2, 1\} = \{0 \mid 1/4\} \equiv 1/8 \end{aligned}$$

atd.

V kanonickém tvaru dostaneme $|\!\circ \equiv 1$, $|\!\circ\bullet \equiv 1/2$, $|\!\circ\bullet\bullet \equiv 1/4$ a $|\!\circ\bullet\bullet\bullet \equiv 1/8$. Obecně $|\!\circ\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n\times} = 1/2^n$.

Můžeme ukázat, že platí následující pravidlo.

Věta 3.15. *Platí* $1 > 1/2 > 1/4 > \cdots > 1/2^n > \cdots$.

Důkaz. Případ $1 > 1/2$ přenecháme čtenáři. Ukážeme, že z platnosti vztahu $1/2^k > 1/2^{k+1}$ plyne pro $k \geqslant 1$ platnost $1/2^{k+1} > 1/2^{k+2}$. Jinými slovy $d_k = \big\{0 \bigm| 1/2^{k-1}\big\} + \big\{-1/2^k \bigm| 0\big\} > 0$ implikuje

$$d_{k+1} = \big\{0 \bigm| 1/2^k\big\} + \big\{-1/2^{k+1} \bigm| 0\big\} > 0,$$

pro $k \geqslant 1$. Pokud ve hře d_{k+1} začíná Levý hráč, zahraje ve druhé komponentě a získá $1/2^{k+1} - 1/2^{k+1} = 0$ a tedy vyhraje. Pokud začíná pRavý a zahraje ve druhé komponentě do 0, odpoví Levý v první komponentě do 0 a vyhraje. Pokud by pRavý šel svým prvním tahem v d_{k+1} do $1/2^k - 1/2^{k+2}$, Levý odpoví do $1/2^k - 1/2^{k+1}$, která je kladná ($\rightsquigarrow L$) díky indukční hypotéze. Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 3.16. *Pro každé celé $n \geqslant 1$ je zlomek $1/2^n$ ekvivalentní číslu* $\big\{0 \bigm| 1/2^{n-1}\big\}$.

Důkaz. Nechť $x = 1/2^{n-1}$ a $y \equiv \{0 \mid x\}$. Díky indukci je $x = \{0 \mid 2x\}$. Protože $0 < y < x < x+y < 2x$, je x mezi y a $x+y$, ale pro x^L a x^R tato vlastnost neplatí. Podle věty o zjednodušení je také $x = \{y \mid x + y\}$, které je ekvivalentní $2y$ podle definice sčítání. $\square$

Nyní máme k dispozici všechny mocniny $1/2$. Z toho také plyne, že každé celé číslo můžeme vydělit mocninou $1/2$. Z definice je vidět, že ve všech hrách $1/2^n$ $\rightsquigarrow L$, zatímco ve hrách $-1/2^n$ $\rightsquigarrow R$. Ve hře Hackenstring získáme opačné pozice záměnou barev.

Čísla tvaru $m/2^n$ jsou definována prostřednictvím součtu her.

Definice 3.17. Pro každé celé číslo $m > 0$, číslo $m/2^n$ je
$$\underbrace{1/2^n + 1/2^n + \cdots 1/2^n}_{m\times}.$$

Lemma 3.18. *Pro každé celé číslo $n > 0$ platí $2/2^n = 1/2^{n-1}$.*

Podotkněme, že $1/2 + 1/2 = 1$ a tedy toto lemma je zobecněním této rovnosti. Důkaz indukcí přenecháme čtenáři.

Věta 3.19. *Pro celá čísla $0 \leqslant m \leqslant n$ platí $2^m/2^n = 1/2^{n-m}$.*

Důkaz. Protože $2/2^n = 1/2^{n-1}$, je $2/2^n + 2/2^n = 1/2^{n-1} + 1/2^{n-1}$ nebo $4/2^n = 2/2^{n-1}$. Aplikujeme-li předcházející větu, dostaneme: $2/2^{n-1} = 1/2^{n-2}$. Tedy $2^2/2^n = 1/2^{n-2}$. Budeme-li pokračovat naznačeným způsobem získáme tvrzení věty (indukcí). □

Důsledkem předcházející věty je tvrzení, že každé dyadické racionální číslo lze zapsat ve tvaru, kde v čitateli je liché celé číslo. Zabývejme se nyní optimálními tahy.

Věta 3.20. *Pro každé nezáporné celé číslo $n \geqslant 0$ a libovolné liché celé číslo k platí*
$$\frac{k}{2^n} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \;\middle|\; \frac{k+1}{2^n} \right\}.$$

Důkaz.
$$\frac{k}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{k \text{ krát}} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} + 0 \;\middle|\; \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right\} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \;\middle|\; \frac{k+1}{2^n} \right\}.$$
□

Nabízí se otázka, co lze vytěžit z optimálního tahu ve hře $1/2+1/2-1$. Obecně hrajeme-li ve hrách typu
$$(2q+1)/2^n + (2q+1)/2^m \qquad \text{nebo} \qquad (2q+1)/2^n - (2q+1)/2^m$$
pro $n > m \geqslant 0$. Následující věta shrne naše pozorování.

Věta 3.21. *Pro $n > m \geqslant 0$ optimální tah ve hrách $1/2^n + 1/2^m$ nebo $1/2^n - 1/2^m$ je začít ve hře $1/2^n$ (s vyšší mocninou dvojky).*

Důkaz. Označme $s = 1/2^n + 1/2^m = \{0 \mid 1/2^{n-1}\} + \{0 \mid 1/2^{m-1}\}$.
Předpokládejme, že Levý začíná ve hře s. Pokud Levý zahraje, dostane buď $1/2^n$ nebo $1/2^m$. Lepším tahem je zahrát v první hře (hra je delší), protože $1/2^n > 1/2^m$ (podle předpokladu) a tedy vyhraje.
Nechť dále ve hře s začne pRavý hráč. Zahraje-li v první hře, získá postavení $1/2^{n-1} + 1/2^m$ nebo $1/2^n + 1/2^{m-1}$. Zde lepší tah je zahrát v první hře, protože $1/2^{n-1} + 1/2^m < 1/2^n + 1/2^{m-1} \Leftrightarrow 2/2^n + 1/2^m < 1/2^n + 2/2^m \Leftrightarrow 1/2^m > 1/2^n$.
Zbytek důkazu, tj. $t = 1/2^n - 1/2^m$, kde je lepší zahrát pro $n > m \geqslant 0$, přenecháme čtenáři. □

Důsledek 3.22. *Pro $n > m \geqslant 0$ optimální tah ve hrách*

$$(2p+1)/2^n + (2q+1)/2^m \qquad \textit{nebo} \qquad (2p+1)/2^n - (2q+1)/2^m$$

je zahrát ve hře $(2p+1)/2^n$ (s vyšší mocninou dvojky).

Toto zobecnění a jeho důkaz přenecháme čtenáři, plyne z předcházející věty.

3.2.6. Dyadická čísla obecně. Víme, že $3/8 = \begin{smallmatrix}\circ\bullet\bullet\bullet\\ \circ\bullet\bullet\bullet\\ \circ\bullet\bullet\bullet\end{smallmatrix}$, $1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$. Číslo $3/8$ lze ale zapsat i jinak.

Věta 3.23. *Nechť $r \geqslant 0$ a $n \geqslant 1$ jsou celá čísla. Potom dyadické racionální číslo má herní vyjádření*

$$\frac{2r+1}{2^n} = \left\{ \frac{r}{2^{n-1}} \;\middle|\; \frac{r+1}{2^{n-1}} \right\}.$$

Důkaz. $2r+1$ kopií $1/2^n$ je $\frac{2r+1}{2^n}$. Začne-li Levý hráč, odebere celou jednu větev a hru zanechá s hodnotou (v postavení) $\frac{2r}{2^n} = \frac{r}{2^{n-1}}$. Z druhé strany, začne-li pRavý, odebere jeden svůj nejpravější kámen a hru zanechá v postavení s hodnotou

$$\frac{2r}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{r}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{r+1}{2^{n-1}}.$$

Tedy

$$\frac{2r+1}{2^n} \equiv \left\{ \frac{r}{2^{n-1}} \;\middle|\; \frac{r+1}{2^{n-1}} \right\}.$$

$\square$

Alternativní zápis hry je

þ●●○ $\equiv \{$þ●●$, \,||\,$ þ●$,$ þ$\} = \{1/4, 0 \mid 1/2, 1\} = \{1/4 \mid 1/2\} = 3/8$

(viz předcházející věta pro $r = 1$ a $n = 3$).

3.2.7. Algoritmy výpočtů. Nyní na chvíli zapomeneme na zápis čísel pomocí dvou závorek $\{\cdot \mid \cdot\}$ a budeme se věnovat jednořádkovému zápisu možných pozic ve hře Hackenstring. S minimem znalostí tak budeme schopni vypočítat hodnoty takových her Hackenstring pomocí dvojkové soustavy. Tato metoda je extrémně užitečná i pro analýzu některých nekonečných her, kde se nám podaří nalézt pravidlo a umožní nám sestrojit herní hodnoty všech racionálních čísel. Pomocí binární reprezentace a této metody bude užitečné nejen pro vyšetřování racionálních čísel $\mathbb{Q}$, ale umožní nám počítat i některá neracionální reálná čísla (reálné hodnoty těchto her). Pomocí tohoto pravidla budeme schopni výpočtu hodnot hry Hackenstringu na jednom řádku. Pro Hackenstring vytvoříme jednořádkový zápis pozice. Hodnoty vyjádříme pomocí zlomků nebo jako decimální hodnoty s určením opakovací sekvence (pravidla pokračování).

Nyní začneme s tím, že budeme vypočítávat hodnoty daných jednořádkových her.

Pravidlo: Pravidlo popíšeme pomocí několika kroků takto:

1) Mějme nějaký jednořádkový Hackenstring a jeho pozici. Jednotlivé kameny budeme po řadě kódovat zleva do prava pomocí písmen L a R. Každý bíLý kámen zakódujeme L a čeRný kámen R. Například hodnotu hry $1\frac{3}{8}$ zakódujeme jako $[LLRRL]$, protože hra je v postavení |○○●●○.
2) První změnu L, R označíme (desetinnou) čárkou, tj. např. $[LLRRL] = [L{,}RL]$ nebo jiný příklad $[RRRLRLR] = [RR{,}RLR]$.
3) Dále za (desetinnou) čárkou zaměníme každé R nulou 0 a každé L jedničkou 1. Např. $[L{,}RL] = [L{,}01]$ nebo jiný příklad $[RR{,}RLR] = [RR{,}010]$.
4) Na konec naší posloupnosti zapíšeme ještě jednu jedničku, takže dostaneme $L{,}011$ nebo $RR{,}0101$.
5) Počet počátečních (stejnorodých) znaků odpovídá celému číslu, např. $1 + 0{,}011$ nebo $(-2) + 0{,}101$.
6) Před (desetinnou) čárkou máme celé číslo v desítkové soustavě a za čárkou je číslo ve dvojkové soustavě.

Tato metoda se nazývá Berlekampovo pravidlo (1974). Užitečné je také obrátit toto pravidlo, tj. k dané hodnotě sestrojit konkrétní pozici hry Hackenstring. Tato metoda se ukáže jako zvlášť zajímavá při vyšetřování nekonečných her.

Následující pravidlo je přirozenější. Pravidlo získávání hodnot her je vcelku jednoduché (T. van Roode (2002), viz [8]). Začíná-li hra bíLým kamenem, označíme ho $+1$, naopak -1. Dále budeme předpokládat bez újmy na obecnost, že řádek začíná bíLým kamen (pro čeRný kámen je situace opačná). Nasčítáme hodnoty bíLých kamenů od začátku bez přeskoku nějakého čeRného kamene (dostaneme celé kladné číslo). Bude-li následovat čeRný kámen, připočteme -2^{-n}, v opačném případě připočteme 2^{-n}. V našem prvním příkladě pozice |○●●○●●●○ má hodnotu

$$+1 - 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 - 1/32 - 1/64 + 1/128.$$

Má-li hra více řádků, sečteme hodnoty všech řádků. Pokud výsledná hodnota je kladná vyhraje bíLý hráč, v opačném případě čeRný. Je-li hodnota nulová, první hráč nemůže zahrát dobře (bez chyb druhého) a nemůže si zajistit vítězství. Pro nulovou hodnotu existuje vítězná strategie pro druhého hráče.

Dále se budeme zabývat také „zlomky“ s nedvojkovým jmenovatelem.
Pravidlo: Metodu popíšeme v několika krocích:

1) Pro libovolné racionální číslo n oddělíme celou část k a desetinnou část q. Např. pro $3\frac{11}{32}$ dostaneme $k = 3$ a $q = \frac{11}{32}$.
2) Celé číslo prozatím necháme a desetinnou část převedeme do dvojkové soustavy. Pro zlomek q dostaneme

$$q = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}.$$

Např. je-li $q = \frac{11}{32}$, potom

$$q = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32}.$$

Posloupnost a_i zaznamenáme do závorek, tj. v našem příkladě získáme [,01011]

3) K této posloupnosti přidáme celé číslo k, tj. $[k{,}a_1a_2\ldots]$. V našem příkladu 3,01011 .
4) Nyní zakódujeme celou část k pomocí L (pokud je $k \geqslant 0$) nebo R (je-li $k < 0$). V našem případě je to $n = [LLL{,}01011]$.
5) Poslední jedničku vynecháme a dvojkovou (necelou) část opět zakódujeme, místo 0 píšeme R, místo 1 píšeme L.
6) Znak , zaměníme za LR.
7) Konečně nakreslíme herní situaci ve hře Hackenstring, zaměníme-li L bíLým kamenem a R čeRným, tedy

$$\vdash\!\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ = 3\frac{11}{32}.$$

Ilustrujte tuto metodu ještě na příkladu $2\frac{3}{4}$.

Nyní tuto metodu použijeme pro komplikovanější racionální čísla. Budeme hledat pozici pro hru s hodnotou 1/3. Jak už víme, pozice bude nekonečná.

Příklad 3.24. Nechť $n = 1/3$, $k = 0$ a $q = 1/3$. Číslo 1/3 vyjádříme ve dvojkové soustavě:

$$1/3 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{1}{64} + \cdots .$$

Vidíme, že dostáváme posloupnost $[LR\overline{RL}]$. Pro 1/5 dostaneme $[LR\overline{RRLL}]$ nebo pro $20/7 = 2\frac{6}{7} = 2{,}\overline{110} = [LLLR\overline{LLR}]$ atd.

3.2.8. Rekurzivní formule. Rekurzivní formule nám pomůže spočítat hodnotu libovolného Hackenstringu, viz [3]. Pro jednoduchost uvažujme $\underbrace{\vdash\!G}_{\text{napojení}}$, tj. napojení hry G za hru $\circ$. Toto napojování budeme nyní označovat $(1 : G)$. Levý hráč na tahu v pozici $(1 : G)$ může zahrát do pozice $(1 : G^L)$, tj. svůj tah udělá někde ve hře G, nebo do hry 0. Pravý hráč může táhnout pouze ve hře G a svým tahem se dostane do pozice $(1 : G^R)$.

Tedy hodnota hry je

$$(1 : G) = \bigl\{0, (1 : G^L) \bigm| (1 : G^R)\bigr\}.$$

Pro napojování $(-1 : G)$ platí analogická formule.

Spočítáme několik prvních hodnot, pro celé číslo n dostaneme:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} n = & \ldots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots, \\ (1:n) = & \ldots & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots, \end{array}$$

tj. pro $n = 0, 1, \ldots$ platí

$$(1 : n) = n + 1$$

a pro $n = 1, 2, \ldots$ máme

$$(1 : -n) = \frac{1}{2^n}. \tag{3.4}$$

Hodnota hry $|\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n\times}$ je $-n$. Hodnota hry þ$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{n\times}$ je $(1 : n)$ a hodnota þ$\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{n\times}$ je $(1 : -n)$. Ve hře $(1 : -n)$ má Levý hráč jedinou možnost odebrat první související bíLý kámen $\circ$, zatímco pRavý hráč může odebírat své čeRné kameny.

Tedy hodnota bude

$$(1 : -n) = \{0 \mid (1 : 0), (1 : -1), \ldots, (1 : -(n-1))\}.$$

Indukcí předpokládejme, že $(1 : -k) = \frac{1}{2^k}$ for $k = 0, 1, \ldots, n-1$, potom dostaneme:

$$(1 : -n) = \left\{0 \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \frac{1}{2^n},$$

viz (3.4).

Funkce $f(x) = (1 : x)$ je po částech lineární. Pro dyadická čísla x dostaneme

$$\text{pro } n \leqslant x \leqslant n+1, \quad (1 : x) = f(x) = (f(n+1) - f(n)) \cdot (x - n) + f(n).$$

Samozřejmě situace pro $(-1 : x)$ je analogická. Několik prvních hodnot $(-1 : x)$ pro celá čísla x jsou

$x =$	$\ldots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
$-1 : x =$	$\ldots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$\ldots$

Poznamenejme, že všechny pozice Hackenstringu jsou čísla.

Příklad 3.25. Nalezené zákonitosti nám pomohou efektivně vypočítávat hodnoty čeRnobíLých řad. Například určíme hodnotu þ○●○●.

1) Nejdříve pomocí rekurzivní formule získáme postupně tyto hodnoty:
   a) |● $= -1$,
   b) þ● $= (1 : -1) = 1/2$,
   c) |●○● $= (-1 : 1/2) = -3/4$,
   d) þ●○● $= (1 : -3/4) = 5/8$,
   e) þ○●○● $= (1 : 5/8) = 13/8$.
2) Výpočet přímo, viz [6]: Idea je skákání po číselné ose, pro bíLé na začátku budeme skákat po jedničce, zbylé skoky vždy zkracujeme o poloviny, pro čeRný kámen se vracíme. Takže hodnota þ○●○● $= 1+1-1/2+1/4-1/8 = 13/8$.
3) Je jednoduché odvodit také $(x : 1) = \{x^L, x \mid x^R\} = \{x \mid x^R\}$ a $(x : -1) = \{x^L \mid x\}$. (Napojování shora, zprava.) Postupně dostaneme:
   a) þ $= 1$,
   b) þ○ $= (1 : 1) = 2$,
   c) þ○● $= (2 : -1) = (\{1 \mid\} : -1) = \{1 \mid 2\} = 3/2$,
   d) þ○●○ $= (3/2 : 1) = (\{1 \mid 2\} : 1) = \{3/2 \mid 2\} = 7/4$,
   e) þ○●○● $= (7/4 : -1) = (\{3/2 \mid 2\} : -1) = \{3/2 \mid 7/4\} = 13/8$.
4) (Berlekampovo pravidlo)
   a) Okódujeme řadu kamenů tak, že místo bíLého kamene $\circ$ píšeme 1 a čeRného kamene 0. Pro náš příklad tedy 11010.

b) Vyznačíme první změnu cifer závorkou: 1(10)10.
c) Sečteme čísla před závorkou, místo závorky píšeme desetinnou čárku a další cifry reprezentují dvojkový zápis. Nakonec přidáme ještě jednu jedničku. Pro náš příklad je tedy $(1,101)_2 = 1 + 1/2 + 1/8 = 13/8$.

Příklad 3.26. Nalezneme hodnotu Hackenstringu |○●●○. Nalezneme pozici Hackenstringu s hodnotou 7/8.

Řešení:

1) Hodnota je $1 - 1/2 - 1/4 + 1/8 = (8 - 4 - 2 + 1)/8 = 3/8$.
2) Hodnota je $(0,011)_2 = 1/4 + 1/8 = 3/8$ (Berlekampovo pravidlo).
3) Hodnota je {|○●●, 0 | |○●, |○} = {1/4 | 1/2} = 3/8.

Protože $7/8 = 1 - 1/8$, je také |○ ●○○○. Číslo 7/8 je také $7 \cdot 1/8$. Jednořádková verze je:

1) $7/8 = 1 - 1/2 + 1/4 + 1/8 =$ |○●○○,
2) $7/8 = (0,111)_2 =$ |○●○○ (Berlekampovo pravidlo),
3) $7/8 = \{3/4 \mid 1\} =$ {|○●○ | |○} = |○●○○.

Poděkování

Autor vřele děkuje anonymnímu recenzentovi, šéfredaktoru Kvaternionu Miroslavu Kurešovi, Haně Rajdlové, Jakubu Šolcovi, Aleně Šolcové a Jiřímu Šremrovi za velmi užitečné komentáře a návrhy na vylepšení textu.

Reference

[1] M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe: *Lessons in Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory*, A K Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2ed., 2019.
[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your Mathematical Plays*; 2ed., vol. 1–4 , A. K. Peters Ltd., 2001–2004.
[3] J. Cihlář, V. Vopravil: *Hry a čísla* (On Games and Numbers), PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., 1983, 1995.
[4] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 2ed., 2001.
[5] L. R. Haff, W. J. Garner: *An Introduction to Combinatorial Game Theory*, Lulu.com, 2019.
[6] A. Kirilov, I. Klumova, A. Sosinskij: *Syurrealnye chisla*, Kvant **11** (1979), rusky.
[7] D. Knuth: *Nadreálná čísla*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, **23** (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261 (překlad: Helena Nešetřilová).
[8] T. van Roode: *Partizan Forms of Hackenbush Combinatorial Games*, Master's thesis, University of Calgary, Calgary, Alberta, July 2002.
[9] D. Schleicher, M. Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers*, Moscow Math Journal 6:359 (2006).
[10] A. Siegel: *Combinatorial Games Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **146**, AMS 2013.
[11] P. Stehlík, V. Vopravil: *John Horton Conway (1937–2020).* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 65, č. **3** (2020), 125–148.
[12] V. Vopravil, J. Porkert: *Hry a strategie*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. **70** (1992), 52–57.

Václav Vopravil, Praha, Česká republika,
e-mail: `gs@wopravil.cz`