# INVERZE MATIC NAD NEKOMUTATIVNÍMI OKRUHY POMOCÍ SCHUROVÝCH DOPLŇKŮ

ALŽBĚTA KOČENDOVÁ A MIROSLAV KUREŠ

ABSTRAKT. Je vysvětleno užití Schurových doplňků pro výpočet inverzní matice a uveden ilustrativní příklad pro matice nad okruhem racionálních kvaternionů s lichými jmenovateli.

## 1. Úvod

Článek lze chápat jako rozšiřující text pro kurs lineární algebry. Zabývá se metodou výpočtu inverzní matice, kterou lze použít pro nekomutativní tělesa, ale i nekomutativní okruhy. Lze ji samozřejmě použít i pro struktury komutativní. Jak je obvyklé, inverzní maticí pro čtvercovou matici $A$ řádu $n$ rozumíme matici $A^{-1}$ splňující $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Hlavní uplatnění vidíme pro inverzi kvaternionových matic nebo duálně kvaternionových matic, které mají aplikace v kinematice a v dalších oborech.

## 2. Nejběžnější metody výpočtu inverzní matice

### 2.1. Výpočet užitím adjungované matice

Začněme nejužívanější metodou uvedenou prakticky v každém učebním textu z lineární algebry či z algebry (viz například [4]). *Algebraickým doplňkem* $A_{ij}$ prvku $a_{ij}$ čtvercové matice $A$ rozumíme determinant matice vzniklé z $A$ vypuštěním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce násobený $(-1)^{i+j}$. Transponovaná matice z algebraických doplňků se nazývá *adjungovaná matice*, označíme ji adj $A$ a máme tedy

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $A$ invertovatelná s deteminantem $d$, lze inverzní matici $A^{-1}$ spočíst jako $\frac{1}{d}$-násobek adj $A$.

Důkaz tohoto tvrzení není těžký, počítejme $A \cdot \operatorname{adj} A$. Diagonální prvky součinu jsou tvaru $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, což není nic jiného než Laplaceův rozvoj podle $i$-tého řádku, a tedy diagonální prvky jsou rovny $d$. Nediagonální prvky součinu jsou

2020 *MSC.* Primární 15A09, 15B33.
*Klíčová slova.* Schurův doplněk, inverzní matice, nekomutativní okruh.
Práce byla podpořena projektem FSI-S-23-8161.

tvaru $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}$, $j \neq i$, což lze opět chápat jako Laplaceův rozvoj podle $i$-tého řádku, kde hodnoty $i$-tého řádku byly nahrazeny hodnotami $j$-tého řádku, tedy $j$-tý řádek je v takové matici dvakrát a ta je tudíž singulární. Proto jsou nediagonální prvky rovny 0 a protože jsme zjistili, že $A \cdot \operatorname{adj} A = dI_n$, důkaz je tím hotov.

Pro nekomutativní okruhy je ale tento postup problematický, neboť je problematická už samotná definice determinantu. Už pro matici druhého řádu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nám nekomutativita násobení umožňuje čtyři zobecnění obvyklé definice determinantu, a sice $ad-bc$, $ad-cb$, $da-bc$ a $da-cb$. Pokud akceptujeme první možnost, $ad-bc$, můžeme si všimnout jevu, nad nímž se pozastavil už slavný Arthur Cayley (1821–1895): Matice se dvěma stejnými sloupci, tedy $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$, bude mít determinant $ab - ab = 0$, zatímco matice se dvěma stejnými řádky $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ bude mít determinant $ab - ba$, což je při nekomutativním násobení obecně nenulové číslo.

## 2.2. Výpočet užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace

Kvůli výše uvedeným potížím s deteminantem obraťme naši pozornost k další metodě. Inverzní matici lze najít tak, že provádíme řádkové úpravy matice $\big(A \mid I_n\big)$ typu $n\times 2n$ vzniklé tak, že k matici $A$ zprava „přilepíme“ identickou matici $I_n$. Tyto řádkové úpravy provádíme takové, abychom v levé polovině obdélníkové matice obdrželi matici $I_n$, v pravé polovině pak bude $A^{-1}$, schematicky

$$\big(A \mid I_n\big) \sim \cdots \sim \big(I_n \mid A^{-1}\big)\,.$$

Korektnost postupu je jasná: každá řádková úprava matice $A$ představuje násobení matice $A$ vhodnou regulární maticí zleva; pro posloupnost řádkových úprav $A$ pak máme násobení matice $A$ součinem takových regulárních matic, který označme $P$. V levé polovině $\big(A \mid I_n\big)$ tedy máme

$$PA = I_n,$$

v pravé polovině násobení maticí $P$ dává

$$PI_n = A^{-1}.$$

Také tento postup nelze použít pro libovolný okruh. Existují totiž okruhy, kde invertovatelnou matici $A$ nelze obdržet řádkovými ani sloupcovými úpravami z jednotkové matice (a pochopitelně ani $I_n$ pak nelze obdržet úpravami z $A$). Příkladem je okruh $R = \mathbb{Z}[\theta] = \{x + y\theta; x, y \in \mathbb{Z}\}$ pro $\theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2}$ a matice

$$A = \begin{pmatrix} 3-\theta & 2+\theta \\ -3-2\theta & 5-2\theta \end{pmatrix}.$$

Tato matice má inverzi, kterou je $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5-2\theta & -2-\theta \\ 3+2\theta & 3-\theta \end{pmatrix}$, ale neexistují řádkové ani sloupcové úpravy převádějící $I_n$ na $A$ nebo $A$ na $I_n$. Uvedeným příkladem se jako první zabýval Paul Moritz Cohn (1924–2006), který jej zmiňuje ve svém již zhruba šedesát let starém článku [1]. Důkaz neexistence řádkových či sloupcových úprav není triviální, vyžaduje jistou průpravu, ta je ovšem v článku popsána. Existují i jednodušší okruhy, nad kterými matice tohoto druhu existují: další podrobnosti k jejich existenci, zejména pro případ řádů imaginárních kvadratických polí, lze nalézt v [3].

## 3. Výpočet užitím Schurových doplňků

### 3.1. Popis metody

Budeme počítat inverzi ke čtvercové matici $M$. Tu si rozdělme na bloky takto:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde $A$ je typu $m \times m$, $B$ typu $m \times n$, $C$ typu $n \times m$ a $D$ typu $n \times n$. Je-li $A$ invertovatelná, nazveme matici

$$A_s = D - CA^{-1}B \tag{3.1}$$

*Schurův doplněk* matice $A$ v $M$.

Nyní můžeme $M$ vyjádřit jako součin tří matic. Přesvědčme se násobením, že pro invertovatelné $A$ je

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ O & I_n \end{pmatrix}.$$

Přínosem tohoto vyjádření je, že teď můžeme invertovat postupně tři matice v součinu, a to v obráceném pořadí, tedy aplikujeme $(UVW)^{-1} = W^{-1}V^{-1}U^{-1}$. Je zřejmé, že první a třetí matice invertovatelné jsou a druhá je invertovatelná právě tehdy, když je invertovatelná matice $A_s$. V takovém případě tudíž dostaneme

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & A_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Uvědomme si, že postup nevykazuje nejednoznačnosti ani pro případ, že matice jsou nad nekomutativní strukturou, například nad kvaterniony. Pro komutativní případ pak snadno odvodíme další tvrzení, a sice

$$\det M = \det A \det A_s. \tag{3.3}$$

Ano, první a třetí matice mají přece determinant rovný 1, takže determinant $M$ je součinem determinantů bloků prostřední matice, tedy $\det A$ a $\det A_s$. Pro nekomutativní případ ale takto zavedený determinant zůstává jen jednou z možností (stejně tak se nabízí součin $\det A_s \det A$), takže determinantu zavedenému vztahem (3.3) budeme říkat *Schurův determinant*. (V poněkud jiné situaci je tímto způsobem počítán determinant v článku [5].)

Vraťme se k inverzi matice. Algoritmus výpočtu bude prostý. Matici $A$ budeme brát typu $1 \times 1$, pak půjde o jeden prvek v levém horním rohu (říkáme mu *pivot*), je-li jednotkou, existuje k němu prvek inverzní. Pokud jednotkou není, provedeme řádkové a/nebo sloupcové permutace tak, aby tento prvek jednotkou byl.

Nyní se otázka invertovatelnosti matice $M$ převede na invertovatelnost matice $A_s$, jejíž řád je o jedničku nižší. Pro matici $A_s$ proto postup zopakujeme a toto iterujeme tak dlouho, až se problém zredukuje na invertovatelnost matice prvního řádu, což už je triviální.

Pokud jsme přehodili řádky či sloupce proto, aby pivot byl jednotkou, vynásobili jsme matici jistými regulárními (tzv. *permutačními)* maticemi zleva nebo zprava. Tak jsme obdrželi novou matici

$$N = PMQ,$$

kde $P$ a $Q$ jsou permutační matice. Najdeme-li ovšem inverzi $N^{-1}$, pak $N^{-1} = (PMQ)^{-1} = Q^{-1}M^{-1}P^{-1}$ a odtud

$$M^{-1} = QN^{-1}P.$$

### 3.2. Okruh racionálních kvaternionů s lichými jmenovateli

Budeme uvažovat nekomutativní okruh racionálních kvaternionů s lichými jmenovateli [1], tj.

$$\begin{aligned} R = \{a + bi + cj + dk;\ & a, b, c, d \text{ jsou racionální čísla s lichými jmenovateli,} \\ & i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k\}. \end{aligned}$$

Vezměme libovolný prvek okruhu $q = a+bi+cj+dk$. Podívejme se, jaké podmínky musí splňovat čísla $a, b, c, d$, aby byl prvek $q$ jednotkou okruhu $R$. To, že $q$ je jednotkou znamená, že existuje prvek $q^{-1} = e + fi + gj + hk$ takový, že platí

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1.$$

Musí tedy platit

$$(a + bi + cj + dk)\,(e + fi + gj + hk) = 1.$$

Roznásobením dostáváme

$$\begin{aligned} ae + afi + agj + ahk + bei - bf + bgk - bhj \\ + cej - cfk - cg + chi + dek + dfj - dgi - dh = 1, \end{aligned}$$

což lze zapsat jako soustavu 4 rovnic pro 4 neznámé $e, f, g, h$.

$$\begin{aligned} ae - bf - cg - dh &= 1, \\ af + be + ch - dg &= 0, \\ ag - bh + ce + df &= 0, \\ ah + bg - cf + de &= 0. \end{aligned}$$

---

[1] volba tohoto okruhu pro ilustrační příklad má své dobré důvody: z pohledu aplikací je za nekomutativní okruh vhodné vzít kvaterniony, ale existence multiplikativní inverze pro všechny nenulové prvky, kterou mají kvaterniony nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{Q}$, mnohé usnadňuje: proto jsme vzali nekomutativní okruh, v němž multiplikativní inverze pro nenulové prvky obecně nemusí existovat; důležité je i to, že náš okruh $R$ má jediný maximální (oboustranný) ideál

Řešení této soustavy je tvaru

$$\begin{aligned} e &= \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \quad f = \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \\ g &= \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \quad h = \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

$a, b, c, d$ jsou racionální čísla tvaru $\frac{x}{y}$, kde $y$ je liché číslo. Můžeme snadno ověřit, že také $q^{-1}q = 1$. [2]

Potřebujeme zjistit, za jakých podmínek budou čísla $e, f, g, h$ stejného tvaru. Vyjádřeme jednotlivé koeficienty ve tvaru základních zlomků jako $a = \frac{x_1}{y_1}$, $b = \frac{x_2}{y_2}$, $c = \frac{x_3}{y_3}$, $d = \frac{x_4}{y_4}$ a dosaďme do (3.4). Dostáváme

$$\begin{aligned} e &= \frac{\frac{x_1}{y_1}}{\frac{x_1^2}{y_1^2}+\frac{x_2^2}{y_2^2}+\frac{x_3^2}{y_3^2}+\frac{x_4^2}{y_4^2}}, \quad f = \frac{-\frac{x_2}{y_2}}{\frac{x_1^2}{y_1^2}+\frac{x_2^2}{y_2^2}+\frac{x_3^2}{y_3^2}+\frac{x_4^2}{y_4^2}}, \\ g &= \frac{-\frac{x_3}{y_3}}{\frac{x_1^2}{y_1^2}+\frac{x_2^2}{y_2^2}+\frac{x_3^2}{y_3^2}+\frac{x_4^2}{y_4^2}}, \quad h = \frac{-\frac{x_4}{y_4}}{\frac{x_1^2}{y_1^2}+\frac{x_2^2}{y_2^2}+\frac{x_3^2}{y_3^2}+\frac{x_4^2}{y_4^2}}. \end{aligned}$$

Zjednodušme vyjádření $e$ následovně:

$$\begin{aligned} e &= \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{y_1^2y_2^2y_3^2y_4^2}{x_1^2y_2^2y_3^2y_4^2 + x_2^2y_1^2y_3^2y_4^2 + x_3^2y_1^2y_2^2y_4^2 + x_4^2y_1^2y_2^2y_3^2}, \\ e &= \frac{y_1^2y_2^2y_3^2y_4^2}{y_1} \cdot \frac{x_1}{x_1^2y_2^2y_3^2y_4^2 + x_2^2y_1^2y_3^2y_4^2 + x_3^2y_1^2y_2^2y_4^2 + x_4^2y_1^2y_2^2y_3^2}. \end{aligned}$$

Z předpokladů víme, že hodnoty $y_i$, kde $i = 1, \dots, 4$, jsou liché. Je tedy zřejmé, že čitatel i jmenovatel prvního zlomku jsou také liché. Parita čitatele i jmenovatele druhého zlomku závisí pouze na hodnotách $x_i$, kde $i = 1, \dots, 4$. Jmenovatel je lichý právě tehdy, když je lichý počet jednotlivých $x_i$ lichých. Ekvivalentně lze tuto podmínku formulovat tak, že jmenovatel je lichý právě tehdy, když je číslo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ liché. Pokud je tento součet lichý, tak nezáleží na hodnotě čitatele druhého zlomku, tedy hodnotě $x_1$ a $e$ bude ve tvaru $\frac{x}{y}$, kde y je liché číslo. Analogicky lze ukázat, že pokud je součet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ lichý, tak také $f, g, h$ budou ve tvaru $\frac{x}{y}$, kde $y$ je liché číslo, tedy $q^{-1} \in R$. Jinými slovy pokud je součet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ lichý, tak prvek $q$ je jednotkou okruhu $R$. Pokud by byl součet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ sudý a všechna $x_i$, kde $i = 1, \dots, 4$, sudá mohl by nastat případ, kdy lze ve vyjádření $e, f, g, h$ krátit a dosáhnout tak také lichého jmenovatele. Tento případ ale vyloučíme následujícími úvahami. Nejdříve vyloučíme případ, kdy je $q = 0$. Takový prvek zřejmě jednotkou není. Dále předpokládejme $q$ nenulové. Nechť $n$ je největší sudé číslo, které dělí všechna $x_i$, kde $i = 1, \dots, 4$, pak každé $x_i$ lze zapsat jako $x_i = nz_i$. Pak musí nutně být alespoň jedno $z_i$ liché. Nechť je liché například $z_1$. Potom pro $e$ platí

$$e = \frac{y_1^2y_2^2y_3^2y_4^2}{y_1} \cdot \frac{nz_1}{n^2\left(z_1^2y_2^2y_3^2y_4^2 + z_2^2y_1^2y_3^2y_4^2 + z_3^2y_1^2y_2^2y_4^2 + z_4^2y_1^2y_2^2y_3^2\right)},$$

[2] tento výsledek je dobře známý: inverzní kvaternion lze spočíst pomocí konjugovaného kvaternionu; ve jmenovateli vidíme právě normu kvaternionu

$$e = \frac{y_1^2y_2^2y_3^2y_4^2z_1}{y_1} \cdot \frac{1}{n\left(z_1^2y_2^2y_3^2y_4^2 + z_2^2y_1^2y_3^2y_4^2 + z_3^2y_1^2y_2^2y_4^2 + z_4^2y_1^2y_2^2y_3^2\right)}.$$

Vidíme, že v čitateli jsou pouze lichá čísla, takže $n$ ve jmenovateli nelze krátit a jmenovatel je tím pádem sudý. Tedy $q^{-1}$ není prvek okruhu $R$, neboli $q$ není jednotkou okruhu $R$. Analogicky to lze ukázat i pro liché $z_2, z_3$ nebo $z_4$. Celkově jsme odvodili:

*Jednotky okruhu $R$ jsou právě ty prvky $q = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}i + \frac{x_3}{y_3}j + \frac{x_4}{y_4}k$, pro které platí, že součet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ je lichý.*

### 3.3. Ukázkový příklad

Mějme okruh $R = \{a + bi + cj + dk;\ a, b, c, d$ jsou racionální čísla s lichými jmenovateli, $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k\}$. Dále mějme zadanou matici $M_0$. Vypočítejte inverzní matici k $M_0$, jestliže

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}k & 0 & 2i & 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + k & 0 & 0 & 3j \\ \frac{1}{3}j & 0 & 1 & j \\ \frac{4}{5}i + \frac{1}{5}k & \frac{3}{5} & 2i & \frac{2}{3}j + k \end{pmatrix}.$$

Pro použití algoritmu potřebujeme mít jako pivota jednotku. $\frac{2}{3}k$ není jednotka. V prvním řádku ve čtvrtém sloupci je prvek, který ovšem jednotkou je. Provedeme tedy takovou permutaci, ve které prohodíme první a čtvrtý sloupec. Tím získáme matici která má pivota jednotku. Vezměme permutační matice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom dostáváme

$$M_1 = P_1 M_0 Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & \frac{2}{3}k \\ 3j & 0 & 0 & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + k \\ j & 0 & 1 & \frac{1}{3}j \\ \frac{2}{3}j + k & \frac{3}{5} & 2i & \frac{4}{5}i + \frac{1}{5}k \end{pmatrix}.$$

Na matici $M_1$ lze použít algoritmus a vypočítat příslušný Schurův doplněk $A_{s1}$. K tomu je potřeba rozdělit matici do bloků následujícím způsobem

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 2i & \frac{2}{3}k \\ \hline 3j & 0 & 0 & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + k \\ j & 0 & 1 & \frac{1}{3}j \\ \frac{2}{3}j + k & \frac{3}{5} & 2i & \frac{4}{5}i + \frac{1}{5}k \end{array}\right).$$

Dostáváme tedy submatice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2i & \frac{2}{3}k \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 3j \\ j \\ \frac{2}{3}j + k \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + k \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}j \\ \frac{3}{5} & 2i & \frac{4}{5}i + \frac{1}{5}k \end{pmatrix}.$$

Díky provedenému blokovému rozdělení matice $M_1$ lze snadno spočítat inverzní matici k jednoprvkové matici $A_1$. Tedy

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Následně lze dosadit do vztahu (3.1) pro výpočet Schurova doplňku,

$$A_{s1} = D_1 - C_1 A_1^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6k & \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i + \frac{1}{3}j + k \\ 0 & 1 + 2k & -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j \\ \frac{3}{5} & 2i - 2j + \frac{4}{3}k & \frac{2}{3} + \frac{16}{45}i + \frac{1}{5}k \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet $M_1^{-1}$ pomocí vztahu (3.2) je nutné znát $A_{s1}^{-1}$. Pro výpočet této inverzní matice použijeme stejný postup jako pro výpočet $M_1^{-1}$. V matici $A_{s1}$ vidíme jednotku v prvním řádku ve třetím sloupci. Vezmeme tedy permutační matice

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak dostáváme

$$M_2 = P_2 A_{s1} Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i + \frac{1}{3}j + k & 6k & 0 \\ -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j & 1 + 2k & 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{16}{45}i + \frac{1}{5}k & 2i - 2j + \frac{4}{3}k & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Matici opět rozdělíme do bloků tak, aby byl pivot v jednoprvkové matici, tedy

$$M_2 = \left(\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i + \frac{1}{3}j + k & 6k & 0 \\ \hline -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j & 1 + 2k & 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{16}{45}i + \frac{1}{5}k & 2i - 2j + \frac{4}{3}k & \frac{3}{5} \end{array}\right).$$

Dostáváme submatice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i + \frac{1}{3}j + k \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 6k & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j \\ \frac{2}{3} + \frac{16}{45}i + \frac{1}{5}k \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 + 2k & 0 \\ 2i - 2j + \frac{4}{3}k & \frac{3}{5}. \end{pmatrix}.$$

Pro matici $A_2^{-1}$ platí

$$A_2^{-1} = \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}i - \tfrac{1}{9}j, -\tfrac{1}{3}k\right).$$

Spočítejme Schurův doplněk k matici $M_2$.

$$A_{s2} = D_2 - C_2A_2^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} + \frac{10}{9}i - \frac{10}{9}j & 0 \\ -\frac{194}{135} + \frac{6}{5}i + \frac{4}{27}j + \frac{194}{135}k & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet $M_2^{-1}$ je potřeba znát $A_{s2}^{-1}$. K výpočtu $A_{s2}^{-1}$ opět použijeme stejný postup. V matici $A_{s2}$ je pivotem jednotka, takže není potřeba provádět permutace, tedy

$$M_3 = A_{s2}.$$

Matici $M_3$ rozdělíme do bloků

$$M_3 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{5}{9} + \frac{10}{9}i - \frac{10}{9}j & 0 \\ \hline -\frac{194}{135} + \frac{6}{5}i + \frac{4}{27}j + \frac{194}{135}k & \frac{3}{5} \end{array}\right).$$

Dostáváme submatice

$$A_3 = \left(\tfrac{5}{9} + \tfrac{10}{9}i - \tfrac{10}{9}j\right), \qquad B_3 = \left(0\right), \qquad C_3 = \left(-\tfrac{194}{135} + \tfrac{6}{5}i + \tfrac{4}{27}j + \tfrac{194}{135}k\right),$$
$$D_3 = \left(\tfrac{3}{5}\right).$$

Inverzní matice k matici $A_3$ je

$$A_3^{-1} = \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}i + \tfrac{2}{5}j\right).$$

Schurův doplněk k matici $M_3$ je

$$A_{s3} = D_3 - C_3A_3^{-1}B_3 = \left(\tfrac{3}{5}\right).$$

K jednoprvkové matici $A_{s3}$ vypočítáme inverzní matici snadno jako

$$A_{s3}^{-1} = \left(\tfrac{5}{3}\right).$$

Hodnotu $A_{s3}^{-1}$ lze dosadit do vztahu (3.2) a tím získáme hodnotu $M_3^{-1}$.

$$M_3^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & -A_3^{-1}B_3 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3^{-1} & 0 \\ 0 & A_{s3}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -C_3A_3^{-1} & I_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}j & 0 \\ -\frac{2}{9} - \frac{2}{5}i + \frac{28}{15}j - \frac{62}{45}k & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Jelikož $A_{s2} = M_3$, platí také $A_{s2}^{-1} = M_3^{-1}$. Opět využijeme vztah (3.2) a vypočítáme

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & -A_2^{-1}B_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ 0 & A_{s2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -C_2A_2^{-1} & I_2 \end{pmatrix},$$

odkud

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}j - \frac{3}{5}k & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}i + \frac{6}{5}k & 0 \\ -\frac{1}{15} + \frac{1}{5}i - \frac{1}{15}j - \frac{2}{15}k & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}j & 0 \\ -\frac{1}{15} - \frac{1}{9}i - \frac{10}{9}j + \frac{19}{45}k & -\frac{2}{9} - \frac{2}{5}i + \frac{28}{15}j - \frac{62}{45}k & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Následujícími úpravami získáme vztah pro hodnotu $A_{s1}^{-1}$:

$$\begin{aligned} M_2 &= P_2 A_{s1} Q_2, \\ M_2^{-1} &= \left(P_2 A_{s1} Q_2\right)^{-1}, \\ M_2^{-1} &= Q_2^{-1} A_{s1}^{-1} P_2^{-1}, \\ A_{s1}^{-1} &= Q_2 M_2^{-1} P_2. \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$A_{s1}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} - \frac{1}{9}i - \frac{10}{9}j + \frac{19}{45}k & -\frac{2}{9} - \frac{2}{5}i + \frac{28}{15}j - \frac{62}{45}k & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{15} + \frac{1}{5}i - \frac{1}{15}j - \frac{2}{15}k & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}j & 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}j - \frac{3}{5}k & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}i + \frac{6}{5}k & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní využijeme vztah (3.2) pro výpočet hodnoty $M_1^{-1}$:

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & -A_1^{-1}B_1 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_{s1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -C_1 A_1^{-1} & I_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}k & 0 & -\frac{2}{5}i - \frac{4}{5}j & 0 \\ -\frac{22}{15} - \frac{1}{9}i - \frac{31}{45}j - \frac{14}{15}k & -\frac{1}{15} - \frac{1}{9}i - \frac{10}{9}j + \frac{19}{45}k & -\frac{2}{9} - \frac{2}{5}i + \frac{28}{15}j - \frac{62}{45}k & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}k & -\frac{1}{15} + \frac{1}{5}i - \frac{1}{15}j - \frac{2}{15}k & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}j & 0 \\ -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i + \frac{3}{5}j & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}j - \frac{3}{5}k & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}i + \frac{6}{5}k & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět lze odvodit, že

$$M_0^{-1} = Q_1 M_1^{-1} P_1.$$

Dosazením dostáváme

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i + \frac{3}{5}j & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}j - \frac{3}{5}k & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}i + \frac{6}{5}k & 0 \\ -\frac{22}{15} - \frac{1}{9}i - \frac{31}{45}j - \frac{14}{15}k & -\frac{1}{15} - \frac{1}{9}i - \frac{10}{9}j + \frac{19}{45}k & -\frac{2}{9} - \frac{2}{5}i + \frac{28}{15}j - \frac{62}{45}k & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}k & -\frac{1}{15} + \frac{1}{5}i - \frac{1}{15}j - \frac{2}{15}k & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{2}{5}j & 0 \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5}k & 0 & -\frac{2}{5}i - \frac{4}{5}j & 0 \end{pmatrix}.$$

## Reference


[1] P. M. Cohn: *On the structure of the $GL_2$ of a ring*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **30** (1966), 5–53.

[2] N. Cohen, S. de Leo: *Quaternionic matrices: inversion and determinant*, preprint, https://www.ime.unicamp.br/sites/default/files/pesquisa/relatorios/rp-1999-45.pdf

[3] M. Kureš, L. Skula: *Reduction of matrices over orders of imaginary quadratic fields*, Linear Algebra and Its Applications **435.8** (2011), 1903–1919.

[4] A. G. Kuroš: *Kurs vysšej algebry*, 7. vydání, GITTL, Moskva, 1962, rusky.

[5] B. Maya, M. Kureš: *Some tridiagonal matrices and determinants of Schur-Cohn criterion for trinomials*, University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Series A, Applied Mathematics and Physics **84.4** (2022), 67–80.

Alžběta Kočendová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `226835@vutbr.cz`

Miroslav Kureš, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `kures@fme.vutbr.cz`