

KONSTRUKCE KUŽELOSEČEK POMOCÍ VNĚJŠÍHO SOUČINU GEOMETRICKÉ ALGEBRY PRO KUŽELOSEČKY

PAVEL LOUČKA

ABSTRAKT. Článek se věnuje konstrukcím kuželoseček ze skupin bodů a konstrukcím založeným na průniku dvou kuželoseček; konstrukce jsou pak realizovány pomocí vnějšího součinu, který se vyskytuje v geometrické algebře pro kuželosečky. Popsané postupy jsou umožněny i díky využití projektivní teorie kuželoseček, například zahrnutím reprezentace bodů v nekonečnu. Zvláštní ohled se bere na konstrukci kuželoseček procházejících pěti body a na hledání speciálních kuželoseček ve svazcích kuželoseček.

1. ÚVOD

Kuželosečky – křivky známé již starým Řekům – našly od antiky různé využití v architektuře, matematice, inženýrství a v mnoha dalších odvětvích, [6, 8]. Byl to zvláště rapidní rozvoj počítačových technologií během 20. století, který během posledních desetiletí podnítl další využití kuželoseček, nejčastěji v problémech spojených s počítačovým viděním a grafikou, [4, 14, 22, 26].

V tomto článku se ale namísto popsání konkrétního aplikačního potenciálu těchto křivek pokusíme spíše prozkoumat jejich geometrickou krásu, a to za pomoci spojení dvou matematických nástrojů: 1) projektivní geometrie kuželoseček a 2) geometrických algeber.

V sekci 2 článku definujeme základy geometrické algebry pro kuželosečky, popíšeme, jak se v ní dají kromě vlastních bodů reálné roviny reprezentovat i body v nekonečnu, a nakonec stručně shrneme i klasifikaci různých typů kuželoseček.

V sekci 3 se potom zaměříme na použití teoretického základu při konstrukci vybraných kuželoseček z daných prvků. Kromě již známých poznatků z projektivní teorie kuželoseček sekce prezentuje také nová zjištění (ta se zvláště týkají tzv. zobecněných parabol) a nabízí alternativní, geometricky orientované způsoby konstrukcí kuželoseček.

Pro větší stručnost článku bylo nutné zahrnout jen nejdůležitější teoretický aparát a demonstrovat jen vybranou část možných případů. Detailnější popis problematiky, důkazy vět a větší množství příkladů lze najít v disertační práci [17].

2020 MSC. Primární 15A66; Sekundární 15A75, 15A18, 14N05.

Klíčová slova. Kuželosečka, svazek kuželoseček, singulární kuželosečka, geometrická algebra, Cliffordova algebra, reálná projektivní rovina, vnější součin.

Článek vznikl na základě disertační práce autora v oboru Aplikovaná matematika na FSI VUT v Brně, školitelem byl Petr Vašík z Ústavu matematiky.

2. GEOMETRICKÁ ALGEBRA PRO KUŽELOSEČKY (GAC)

2.1. Stručný úvod do geometrických algeber

Pro větší porozumění struktuře geometrické algebry pro kuželosečky popíšeme nejdříve vybrané koncepty týkající se geometrických algeber. Kvůli větší stručnosti vybíráme jen pojmy, které jsou skutečně důležité pro pochopení dalšího textu. Pro detailní popis vlastností geometrických algeber můžeme doporučit knihu C. Perwasse [25] a knihu P. Lounesta [20], které sloužily jako zdroje informací pro tuto podsekcí.

Začneme pojmem *kvadratický prostor*, který je klíčový pro výstavbu geometrických algeber (pro naše potřeby se omezíme pouze na reálné kvadratické prostory).

Definice 2.1. *Kvadratickým prostorem* $\mathbb{R}^{p,q,r}$ se myslí reálný vektorový prostor dimenze $n = p + q + r$ opatřený komutativním pseudoskalárním součinem¹ $*$: $\mathbb{R}^{p,q,r} \times \mathbb{R}^{p,q,r} \rightarrow \mathbb{R}$ a *kanonickou vektorovou bází*

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q,r} := \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_{p+q+r}\},$$

pro které platí

$$e_i * e_j = \begin{cases} +1, & \text{pro } i = j, \quad i, j \in \langle 1, p \rangle, \\ -1, & \text{pro } i = j, \quad i, j \in \langle p+1, p+q \rangle, \\ 0, & \text{pro } i = j, \quad i, j \in \langle p+q+1, p+q+r \rangle, \\ 0, & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Jinými slovy, kvadratický prostor $\mathbb{R}^{p,q,r}$ obsahuje p bázových vektorů, jejichž druhá mocnina vůči součinu $*$ je $+1$, q bázových vektorů, jejichž druhá mocnina je -1 , a r bázových vektorů, jejichž druhá mocnina je 0 ; jakákoliv dvojice různých bázových vektorů je pak na sebe ortogonální, tedy $e_i * e_j = 0$ pro $i \neq j$. Poznámeme ještě, že bázovým vektorům, jejichž druhá mocnina je 0 , se říká *vektory nulové velikosti* (angl. *null vectors*).

Ekvivalentně se dá také říct, že kvadratický prostor $\mathbb{R}^{p,q,r}$ je $(p + q + r)$ -dimenzionální reálný vektorový prostor opatřený kvadratickou formou, která je indukovaná bilineární formou $*$ s vlastností (2.1). Tato kvadratická forma (stejně jako bilineární forma, která ji indukuje) se dá reprezentovat diagonální maticí B , která má na hlavní diagonále postupně p jedniček, q mínus jedniček a r nul. Kdybychom např. uvažovali prostor $\mathbb{R}^{2,3,1}$, jeho kvadratická forma by byla reprezentovaná maticí

¹Běžný skalární součin je symetrická, pozitivně definitní, bilineární forma; použitý součin $*$ nazýváme jako „pseudoskalární“ v tom smyslu, že jeho násobením nějakého nenulového vektoru sama se sebou můžeme získat i 0 nebo dokonce záporné číslo, viz další text. Použitý součin je symetrická bilineární forma, obecně ale není pozitivně definitní. O běžný skalární součin se jedná pouze v případě, že $q = r = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici B také můžeme vnímat jako přehled všech možností pseudoskalárního součinu mezi bázovými vektory podle (2.1), např. $e_1 * e_1 = 1, e_3 * e_3 = -1, e_6 * e_6 = 0$ a pro rozdílné bázové vektory platí $e_i * e_j = 0$. Pokud bychom dále chtěli spočítat v tomto prostoru pseudoskalární součin dvou obecných vektorů u a v , lze to udělat pomocí distributivity nebo – ekvivalentně – pomocí běžného maticového násobení s využitím matice B . Uvažujme např.

$$\begin{aligned} u &= 3e_1 - 2e_2 + 5e_3 - 4e_4 + e_5 - e_6, \\ v &= 2e_1 + e_2 - 4e_3 - e_4 + 3e_5 + 7e_6, \end{aligned}$$

kteří lze dále reprezentovat jako vektory koeficientů v bázi $\{e_1, \dots, e_6\}$, tedy

$$\begin{aligned} u &= (3, -2, 5, -4, 1, -1)^T, \\ v &= (2, 1, -4, -1, 3, 7)^T. \end{aligned}$$

Potom $u * v = u^T B v$ neboli

$$\begin{aligned} u * v &= (3, -2, 5, -4, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \cdot 7 = \\ &= 6 - 2 + 20 - 4 - 3 + 0 = 17. \end{aligned}$$

Zmíňme také, že trojici (p, q, r) se říká *signatura* a kromě počtů bázových vektorů, které se po řadě umocňují na $+1, -1$ a 0 , značí tato trojice také *signaturu matice* příslušné kvadratické formy, tedy počty kladných, záporných a nulových vlastních čísel matice.

Na kvadratickém prostoru lze pak pomocí následující definice vystavět geometrickou algebru.

Definice 2.2. Nechť je $\mathbb{R}^{p,q,r}$ kvadratický prostor s pseudoskalárním součinem $*$ a kanonickou vektorovou bází $\mathbb{R}^{p,q,r}$. Dále uvažujme volnou, unitární a asociativní algebru $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q,r})$ nad kvadratickým prostorem $\mathbb{R}^{p,q,r}$, jejíž součin značíme \circ . Potom $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q,r})$ se nazývá *geometrická algebra*, jestliže pro libovolný vektor $a \in \mathbb{R}^{p,q,r} \subset \mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q,r})$ platí

$$a \circ a = a * a. \quad (2.2)$$

Geometrická algebra nad $\mathbb{R}^{p,q,r}$ se pak značí $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{p,q,r})$ nebo jednodušeji $\mathbb{G}_{p,q,r}$ a jejímu součinu \circ se pak říká *Cliffordův* nebo *geometrický součin*. Ačkoli v definici výše se tento součin značí jako \circ , obvykle se jeho značka zcela vypouští; pro geometrický součin dvou objektů se tedy používá prostá juxtaopozice.

Poznámka 2.3. Často se lze setkat s kvadratickými prostory, které nemají žádné bázové vektory nulové velikosti; v takových případech se prostor obvykle značí pouze jako $\mathbb{R}^{p,q}$ a přidružená geometrická algebra jako $\mathbb{G}_{p,q}$. Podobně lze také geometrické algebry budovat nad kvadratickými prostory \mathbb{R}^n s n -ticí běžných euklidovských bázových vektorů, jejichž druhá mocnina je $+1$; takové geometrické algebry se potom značí jednoduše jako \mathbb{G}_n .

Následně, pokud není v kvadratickém prostoru či příslušné geometrické algebře přítomna trojice horních (resp. dolních) indexů, ale například jen dvojice či pouze jedno číslo, i této dvojici či jednomu číslu se někdy říká signatura.

Abychom lépe mohli vysvětlit některé přívlasky popisující geometrické algebry zavedené v Definici 2.2, řekněme nejprve něco víc o prvcích geometrických algeber.

Kromě vektorů z $\mathbb{R}^{p,q,r}$ (tedy vektorů v běžném slova smyslu) obsahuje $\mathbb{G}_{p,q,r}$ i jiné prvky, jak uvidíme níže (prvkům geometrických algeber se pak obecně říká *multivektory*). Ke konstrukci složitějších multivektorů se váže několik dalších pojmů, které můžeme snadno demonstrovat pomocí geometrické algebry \mathbb{G}_3 s kanonickou vektorovou bází $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Geometrickému součinu více různých bázových vektorů se říká *bázový blade*. Příkladem bázového blade v této geometrické algebře může být např. $e_2e_3e_1$; takové blade se pak někdy zapisují jednodušeji pomocí jednoho písmene, s následným zřetězením spodních indexů, tudíž $e_2e_3e_1 = e_{231}$.

Stupeň nebo *grade* bázového blade je potom počet různých generujících bázových vektorů v blade a značí se gr . Platí tedy $\text{gr}(e_2e_3e_1) = 3$.

Důležité je také, že na pořadí bázových vektorů v bázovém blade *záleží*, dá se totiž ukázat, že geometrický součin dvou bázových vektorů je antikomutativní, tj.

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad (2.3)$$

z čehož mimo jiné plyne, že geometrický součin bázového vektoru se sebou samým je nula, tj.

$$e_i e_i = 0.$$

Pomocí vlastnosti (2.3) lze jakýkoliv bázový blade přeskládat tak, aby byly indexy tvořících bázových vektorů ve vzestupném pořadí, například

$$e_2e_3e_1 = -e_2e_1e_3 = e_1e_2e_3.$$

Množina všech různých bázových bladeů se vzestupným pořadím indexů tvořících bázových vektorů, ve které jsou navíc blade seřazeny vzestupně podle stupně, se pak nazývá *kanonická algebraická báze* geometrické algebry. Pro \mathbb{G}_3 je to báze

$$\overline{\mathbb{G}}_3 = \{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}.$$

Obecně platí, že geometrická algebra $\mathbb{G}_{p,q,r}$ má vždy bázové blady stupňů 0 až $n = p + q + r$ a její kanonická algebraická báze obsahuje dohromady 2^n různých bázových bladů. Zde také poznamenejme, že bázový blade nulového stupně je 1 a že bázovému bladů s nejvyšším možným stupněm se říká *pseudoskalár* a značívá se jako I . Navíc, pokud i -tý bázový blade z kanonické algebraické báze označíme jako E_i , pak se dá jakýkoli multivektor $A \in \mathbb{G}_{p,q,r}$ zapsat jako

$$A = \sum_{i=1}^{2^n} a^i E_i, \quad a^i \in \mathbb{R}$$

nebo pomocí Einsteinovy sumační konvence jednoduše jako $A = a^i E_i$. Takový multivektor v \mathbb{G}_3 může mít např. formu

$$A = 5 - 3e_2 + 7e_1e_3.$$

Zmíňme také, že multivektor, který se skládá jen z bladů k -tého stupně, se nazývá *k-vektor*. Některé k -vektory se vyskytují tak často, že mají i zaběhlý jednoslovný název; např. 1-vektorům se někdy pro zjednodušení říká *vektory*, 2-vektorům *bivektory* a 3-vektorům *trivektory*.

Nyní, po přiblížení pojmu multivektoru, můžeme algebraické vlastnosti geometrických algeber snadněji vyložit:

1. To, že geometrická algebra je *volná algebra*, znamená, že její prvky lze volně konstruovat řetězením pomocí součinu algebry – tady konkrétně pomocí geometrického součinu, jak jsme viděli na příkladech výše.
2. To, že geometrická algebra je *unitární algebra*, znamená, že vůči jejímu součinu existuje neutrální prvek – neutrálním prvkem vůči geometrickému součinu je 1.
3. To, že geometrická algebra je *asociativní algebra*, se dá shrnout ve dvou bodech:
 - (a) Multivektory společně s operací sčítání multivektorů a s operací násobení skalárem tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (b) Geometrický součin multivektorů je vůči algebře uzavřený, je asociativní a distributivní a navíc platí, že geometrický součin skaláru α a multivektoru A je shodný se skalárním násobkem multivektoru, tedy

$$\alpha \circ A = A \circ \alpha = \alpha A.$$

Zásadní rozdíl mezi geometrickou algebrou a jinými asociativními algebrami je rovnost (2.2), které se říká *definující rovnost* (angl. *defining equation*). Tato rovnost říká, že geometrickým součinem 1-vektoru sama se sebou je skalár.

Ještě popíšeme dvě zásadní operace mezi multivektory – *vnitřní* a *vnější součin*. Obě operace lze zavést pomocí tzv. *stupňové projekce* (angl. *grade projection*). Tu nejprve zavedeme mezi bázovými blady a pak ji rozšíříme na multivektory.

Definice 2.4. Nechť E_i je i -tý bázový blade geometrické algebry. Potom *stupňová projekce* blade E_i na stupeň k se značí jako $\langle E_i \rangle_k$ a je definována jako

$$\langle E_i \rangle_k := \begin{cases} E_i, & \text{pro } \text{gr}(E_i) = k, \\ 0, & \text{pro } \text{gr}(E_i) \neq k. \end{cases}$$

Definice 2.5. Nechť E_i a E_j je i -tý, resp. j -tý bázový blade a jejich stupně jsou po řadě k a l . Potom *vnitřní součin* blade E_i a E_j je definován jako

$$E_i \cdot E_j := \begin{cases} \langle E_i E_j \rangle_{|k-l|}, & \text{pro } i, j > 0, \\ 0, & \text{pro } i = 0 \text{ nebo } j = 0. \end{cases}$$

Definice 2.6. Nechť E_i a E_j je i -tý, resp. j -tý bázový blade a jejich stupně jsou po řadě k a l . Potom *vnější součin* blade E_i a E_j je definován jako

$$E_i \wedge E_j := \langle E_i E_j \rangle_{k+l}.$$

Pro názornost uveďme jednoduchý příklad vnitřního a vnějšího součinu dvou bázových blade:

$$\begin{aligned} (e_1 e_2) \cdot e_2 &= \langle e_1 e_2 e_2 \rangle_{|2-1|} = \langle e_1 \rangle_1 = e_1, \\ (e_1 e_2) \wedge e_3 &= \langle e_1 e_2 e_3 \rangle_{2+1} = \langle e_1 e_2 e_3 \rangle_3 = e_1 e_2 e_3. \end{aligned}$$

Protože stupňová projekce je distributivní, pro multivektor $A = a^i E_i$ platí

$$\langle A \rangle_k = a^i \langle E_i \rangle_k,$$

a předchozí definice vnitřního a vnějšího součinu se tedy dají přirozeně rozšířit na jakékoli multivektory.

Nakonec také zmiňme, že lze ukázat, jak elegantně v sobě geometrický součin 1-vektorů spojuje vnitřní a vnější součin. Jsou-li a a b 1-vektory, pak platí

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

Geometrický součin dvou 1-vektorů je tedy formálním součtem jejich vnitřního a vnějšího součinu. Zdůrazněme ovšem, že pro obecné multivektory tato rovnost neplatí. Je také vhodné upozornit na to, že pro dva různé 1-vektory a a b (a obecně jakékoli dva blade stejného stupně) vnitřní součin splývá se součinem pseudoskalárním, tj.

$$a \cdot b = a * b,$$

matici bilineární formy lze tedy vnímat i jako matici realizující vnitřní součin 1-vektorů.

2.2. Základy GAC

Geometrická algebra pro kuželosečky (zkráceně GAC, z angl. *Geometric Algebra for Conics*), původně navržená C. Perwassem v knize [25] a později rozvinutá trojicí Hrdina, Návrat a Vašík v článku [12], rozšiřuje koncept dvoudimenzionální konformní geometrické algebry $\mathbb{G}_{3,1}$ (2D CGA) tak, aby byla nová algebra schopna

reprezentovat kuželosečky. Přesněji řečeno, GAC je geometrická algebra $\mathbb{G}_{5,3}$ s vnořením $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{5,3}$ bodu $p = xe_1 + ye_2$ z roviny \mathbb{R}^2 do 6-dimenzionálního podprostoru 1-vektorů ve tvaru

$$C(x, y) = \bar{n}_+ + xe_1 + ye_2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)n_+ + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)n_- + xyn_\times, \quad (2.4)$$

kde

$$\{\bar{n}_\times, \bar{n}_-, \bar{n}_+, e_1, e_2, n_+, n_-, n_\times\} \quad (2.5)$$

je báze $\mathbb{G}_{5,3}$, společně s bilineární formou danou maticí

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Význam bazových vektorů je pak následující: vektory \bar{n} označují tři vzájemně ortogonální vektory, kterým se říká „počátky“, vektory e_1 a e_2 jsou bazové vektory euklidovské roviny \mathbb{R}^2 a nakonec vektory n představují trojici vzájemně ortogonálních „nekonečen“.

Poznamenejme, že GAC jakožto geometrická algebra se signaturou $(5, 3)$ by měla ve své výchozí definici obsahovat 5 bazových vektorů s druhou mocninou $+1$ a 3 bazové vektory s druhou mocninou -1 ; to ale, podle matice bilineární formy, zdá se, neplatí. Příčinou je, že zde nepoužíváme výchozí bázi, ale bázi transformovanou, pro kterou platí, že vektory e_1 a e_2 mají druhou mocninou $+1$ a počátky i nekonečna se umocňují na 0, jsou to tedy vektory nulové velikosti. Navíc, vnitřní součin každého počátku se sobě odpovídajícím nekonečnem dává -1 , [12, 13].

Zdůrazněme také, že ani změnou původní báze se nezměnila *signatura kvadratické formy* matice B , jež je shodná se signaturou geometrické algebry, tedy $(5, 3)$.

Dále připomeňme základní typy reprezentací objektů v GAC:

Definice 2.7. Řekneme, že prvek $A_I \in \mathbb{G}_{5,3}$ je *reprezentací geometrického objektu* $A \subset \mathbb{R}^2$ *vnitřním součinem* právě tehdy, když

$$A = \{p \in \mathbb{R}^2 : C(p) \cdot A_I = 0\},$$

kde „ \cdot “ značí vnitřní součin v GAC. Této reprezentaci se také říká *IPNS reprezentace* (z angl. *Inner Product Null Space Representation*), [12].

IPNS reprezentace kuželosečky Q v GAC j pak dána 1-vektorem

$$Q_I = \bar{v}^\times \bar{n}_\times + \bar{v}^- \bar{n}_- + \bar{v}^+ \bar{n}_+ + v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^+ n_+ \quad (2.6)$$

a IPNS reprezentace bodu $p = xe_1 + ye_2$, $p \in \mathbb{R}^2$, je dána vnořením (2.4), tedy jako 1-vektor

$$P_I = \bar{n}_+ + xe_1 + ye_2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)n_+ + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)n_- + xyn_\times.$$

Je tedy vidět, že jak bod, tak kuželosečka, jsou vnořeny do 6-dimenzionálních podprostorů $\mathbb{R}^{5,3}$.

Objekty GAC můžeme reprezentovat také pomocí vnějšího součinu, kterému se v geometrických algebrách říká *wedge* a který se značí „ \wedge “. Díky dualitě (značené hvězdičkou) mezi reprezentacemi vnitřním a vnějším součinem platí

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : C(p) \cdot A_I = 0\} = \{p \in \mathbb{R}^2 : C(p) \wedge A_I^* = 0\}.$$

Je to právě A_I^* , které je v geometrických algebrách obvykle považováno za reprezentaci objektu A pomocí vnějšího součinu, v GAC je tomu ovšem trochu jinak. A_I^* je vždy multivektor ve formě $A_O \wedge \bar{n}_- \wedge \bar{n}_\times$, kde A_O je 5-vektor, který obsahuje pouze báze vektory zastoupené v 6-dimenzionálním podprostoru kuželoseček (2.6). Vzhledem k tomu je vhodné jako reprezentaci objektu A vnějším součinem v GAC zvolit právě A_O :

Definice 2.8. Řekneme, že prvek $A_O \in \mathbb{G}_{5,3}$ je *reprezentací geometrického objektu* $A \subset \mathbb{R}^2$ *vnějším součinem* právě tehdy, když

$$A = \{p \in \mathbb{R}^2 : C(p) \wedge A_O \wedge \bar{n}_- \wedge \bar{n}_\times = 0\}.$$

Této reprezentaci se také říká *OPNS reprezentace* (z angl. *Outer Product Null Space Representation*), [12].

Dualita mezi IPNS a OPNS reprezentacemi potom vypadá následovně:

$$\begin{aligned} A_O &= (A_I \wedge n_- \wedge n_\times)^*, \\ A_I &= (A_O \wedge \bar{n}_- \wedge \bar{n}_\times)^*. \end{aligned}$$

Přechod od jedné reprezentace ke druhé se pak dá realizovat pomocí nepravých pseudoskalárů

$$\begin{aligned} I_{OI} &= \bar{n}_+ \bar{n}_- \bar{n}_\times e_1 e_2 n_+, \\ I_{IO} &= \bar{n}_+ e_1 e_2 n_+ n_- n_\times, \end{aligned} \tag{2.7}$$

a vnitřního součinu jako

$$\begin{aligned} A_O &= A_I \cdot I_{IO}, \\ A_I &= A_O \cdot I_{OI}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Jak bude podrobněji popsáno v sekci 3, vnější součin se dá využít ke konstrukci některých kuželoseček – např. OPNS reprezentace kuželosečky Q , která prochází pěti různými body p_1, \dots, p_5 , se dá zkonstruovat jako

$$Q_O = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5,$$

kde P_1, \dots, P_5 jsou body p_1, \dots, p_5 vnořené do GAC podle (2.4). Pomocí wedge se dá také získat IPNS reprezentace průniku dvou kuželoseček, konkrétně jako wedge jejich IPNS reprezentací, tedy

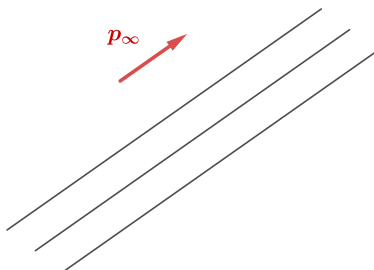
$$(Q^1 \cap Q^2)_I = Q_I^1 \wedge Q_I^2. \tag{2.9}$$

Takto získaný průnik dvou kuželoseček se potom nazývá *čtyřbod* (angl. *four-point*), [12].

Poznámka 2.9. Je třeba zdůraznit, že reprezentace objektů v GAC jsou homogenní – nenulový násobek reprezentace tedy představuje stejný objekt, jako reprezentace původní, [12].

2.3. Projektivizace GAC

Kromě bodů reálné roviny \mathbb{R}^2 lze také uvažovat *body v nekonečnu* – každý z těchto bodů si lze představit jako společný bod všech rovnoběžek se stejným směrem, takový bod se pak značí šipkou v příslušném směru a lze ho reprezentovat jako vektor tohoto směru, viz Obrázek 1. Množina všech bodů v nekonečnu (pro všechny možné směry rovnoběžek) potom tvoří *přímku v nekonečnu* l_∞ . Když reálnou rovinu dále obohatíme o prvky v nekonečnu, vznikne projektivní reálná rovina \mathbb{RP}^2 , tedy $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup l_\infty$. Pro snadné odlišení se pak bodům z \mathbb{R}^2 říká *vlastní body*, bodům v nekonečnu *nevlastní body*, a přímce v nekonečnu *nevlastní přímka*², [27, 15].



Obrázek 1. Nevlastní bod p_∞ jako směr rovnoběžných přímek

Poznámka 2.10. Poznamenejme také, že slovem *směr* se zde myslí spíše *sklon* přímky, takže nenulový násobek nevlastního bodu reprezentuje stále stejný nevlastní bod. Šipka na Obrázku 1 by tedy klidně mohla být obousměrná.

Ačkoli nevlastní body jsou pro teorii kuželoseček zásadní, GAC původně uvažovala jen vlastní body, [12]. Jak vlastní, tak nevlastní body projektivní roviny \mathbb{RP}^2 se mimo rámec GAC dají snadno reprezentovat pomocí tzv. *homogenních souřadnic*, [11]:

²V anglicky psané literatuře se obvykle nevlastní bod nazývá *point at infinity*, *ideal point* nebo *figurative point*, nevlastní přímka pak *line at infinity*. Aby se daly vlastní a nevlastní body snadno odlišit, používal autor článku v disertaci [17] pojmenování podobná češtině: *vlastní–proper* a *nevlastní–improper*. I takto rozlišené názvy lze v anglicky psané literatuře někdy potkat.

Definice 2.11. Necht $p = (x, y)$, $p \in \mathbb{RP}^2$, je vlastní bod, potom jeho *homogenní souřadnice* v \mathbb{RP}^2 jsou

$$p = k(x, y, 1), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

zatímco *homogenní souřadnice* nevlastního bodu $p_\infty = (s, t)$, $(s, t) \neq (0, 0)$, $p_\infty \in \mathbb{RP}^2$, jsou

$$p_\infty = k(s, t, 0), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Právě díky konceptu homogenních souřadnic se v GAC dají reprezentovat jak vlastní, tak nevlastní body, a to rozšířením definičního oboru vnoření (2.4) z \mathbb{R}^2 na \mathbb{RP}^2 podle následující definice, [17, 18, 19]:

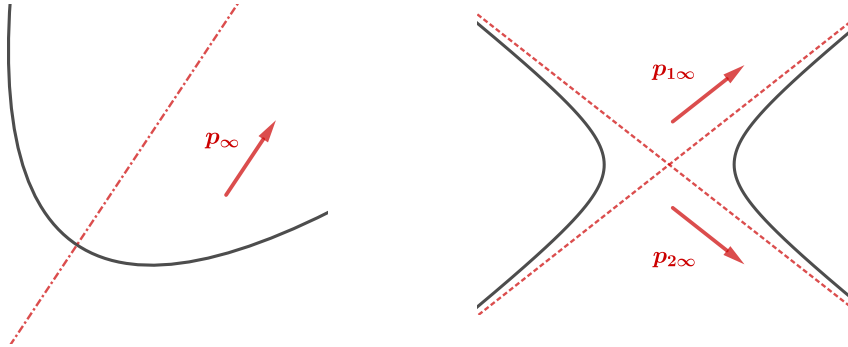
Definice 2.12. Úpravou vnoření $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{5,3}$ ve formě (2.4) definujeme *rozšířené vnoření* $CP : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{5,3}$ bodu $p = (a, b, c)$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, reálné projektivní roviny \mathbb{RP}^2 jako

$$CP(a, b, c) = c^2 \bar{n}_+ + ace_1 + bce_2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)n_+ + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)n_- + abn_\times.$$

Poznámka 2.13. Kdybychom místo bodu $(a, b, c) \in \mathbb{RP}^2$ chtěli do GAC vnořit jeho nenulový násobek (tedy geometricky identický bod), dostaneme po úpravě

$$CP(k(a, b, c)) = k^2 \left(c^2 \bar{n}_+ + ace_1 + bce_2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)n_+ + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)n_- + abn_\times \right),$$

což je opět jen nenulový násobek původního vnoření. Rozšířené vnoření je tedy konzistentní s Poznámkou 2.9, protože nenulový násobek jakéhokoliv geometrického objektu v GAC musí reprezentovat stejnou geometrickou množinu.



Obrázek 2. Nevlastní body paraboly a hyperboly: Parabola má jeden nevlastní bod ve směru své osy, hyperbola má dva ve směrech svých asymptot.

Důsledek 2.14. Protože vlastní bod $p = (x, y)$ lze pomocí homogenních souřadnic zapsat jako $(x, y, 1)$, rozšířené vnoření CP i původní vnoření C vnořují vlastní body do GAC stejným předpisem:

$$CP(x, y, 1) \equiv C(x, y) = \bar{n}_+ + xe_1 + ye_2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)n_+ + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)n_- + xyn_\times.$$

Na druhou stranu, nevlastní bod $p_\infty = (s, t)$ s homogenními souřadnicemi $(s, t, 0)$ je do GAC vnořen ve formě

$$C\mathbb{P}(s, t, 0) = \frac{1}{2}(s^2 + t^2)n_+ + \frac{1}{2}(s^2 - t^2)n_- + stn_\times.$$

Poznamenejme také, že – na rozdíl do vlastního bodu – vnoření nevlastního bodu obsahuje pouze „nekonečna“ vektorové báze (2.5).

2.4. Klasifikace kuželoseček

Připomeňme také, že kuželosečky se dají reprezentovat pomocí symetrické matice typu 3×3 , kterou lze získat z koeficientů IPNS kuželosečky (2.6) jako

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\bar{v}^+ + \bar{v}^-) & -\frac{1}{2}\bar{v}^\times & \frac{1}{2}v^1 \\ -\frac{1}{2}\bar{v}^\times & -\frac{1}{2}(\bar{v}^+ - \bar{v}^-) & \frac{1}{2}v^2 \\ \frac{1}{2}v^1 & \frac{1}{2}v^2 & -v^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Pomocí této matice pak lze kuželosečku plně klasifikovat, tj. určit její typ a další vlastnosti, [16]. Její koeficienty také definují obvyklé rovnice kuželosečky v \mathbb{R}^2 , resp. v \mathbb{RP}^2 , [16, 8]:

$$Q_{\mathbb{R}^2} : q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2 + 2q_{13}x + 2q_{23}y + q_{33} = 0, \quad (2.11)$$

$$Q_{\mathbb{RP}^2} : q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2 + 2q_{13}xz + 2q_{23}yz + q_{33}z^2 = 0. \quad (2.12)$$

Pro naše účely bude později důležitá i hlavní podmatice typu 2×2

$$\bar{M} = M_{33} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\bar{v}^+ + \bar{v}^-) & -\frac{1}{2}\bar{v}^\times \\ -\frac{1}{2}\bar{v}^\times & -\frac{1}{2}(\bar{v}^+ - \bar{v}^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

a další dvě podmatice typu 2×2

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\bar{v}^+ - \bar{v}^-) & \frac{1}{2}v^2 \\ \frac{1}{2}v^2 & -v^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{23} \\ q_{23} & q_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\bar{v}^+ + \bar{v}^-) & \frac{1}{2}v^1 \\ \frac{1}{2}v^1 & -v^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{13} \\ q_{13} & q_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Následně definujme ještě pomocné veličiny

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(M), \\ \delta &= \det(\bar{M}), \\ J &= \text{tr}(\bar{M}) = q_{11} + q_{22}, \\ \Delta' &= \det(M_{11}) + \det(M_{22}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

a popišme základní rozdělení kuželoseček na základě výše definovaných matic a veličin:

Definice 2.15. Nechtě je Q kuželosečka reprezentovaná maticí M ve formě (2.10), podmaticemi (2.13)–(2.15) a pomocnými veličinami definovanými v (2.16).

Jestliže $\Delta \neq 0$, pak nazýváme Q *regulární kuželosečkou*, v opačném případě se jedná o kuželosečku *singulární* (ve starší literatuře se jí též říká *zvrhlá*). Ekvivalentně se dá říct, že matice M regulární kuželosečky má plnou hodnost, tedy $h(M) = 3$, a matice singulární kuželosečky nemá plnou hodnost, tj. $h(M) < 3$.

Jestliže $\delta \neq 0$, pak nazýváme Q *středovou kuželosečkou*, v opačném případě se jedná o kuželosečku *nestředovou*. Ekvivalentně se dá říct, že podmatice \bar{M} středové kuželosečky má plnou hodnost, tedy $h(\bar{M}) = 2$, a podmatice nestředové kuželosečky nemá plnou hodnost, tj. $h(\bar{M}) < 2$, [15].

Detailní klasifikaci kuželoseček v \mathbb{RP}^2 na základě výše definovaných matic a veličin lze najít v Tabulce 1.

Úmluva 2.16. *Kuželosečka reprezentovaná nulovou maticí by ve skutečnosti představovala všechny body v \mathbb{RP}^2 a taková množina obvykle není za kuželosečku považována. Pokud tedy budeme mluvit o kuželosečce v \mathbb{RP}^2 , uvažujme vždy, že její matice je nenulová.*

Úmluva 2.17. *V textu uvažujme jen kuželosečky s reálnými koeficienty. Druhým dechem dodejme, že i kuželosečky popsané rovnicemi s výlučně reálnými koeficienty můžou představovat množinu v \mathbb{C}^2 (resp. \mathbb{CP}^2), která je geometricky smysluplná, jak lze vidět v Tabulce 1.*

Poznámka 2.18. Singulární kuželosečky lze vždy algebraicky rozložit na dvojici přímk, a to včetně případů dvou splývajících přímk či dvou imaginárních přímk, [8]. Jeden z algoritmů schopných takové dekompozice lze najít např. v knize [27].

Dodejme také, že v \mathbb{RP}^2 může být alespoň jednou z dvojice přímk i *přímka v nekonečnu* (*nevlastní přímka*), proto se v klasifikaci dané Tabulkou 1 označují přímk, které nejsou přímkami v nekonečnu, jako přímk *vlastní*. Nakonec poznamenejme, že kuželosečky obsahující nevlastní přímku existují v \mathbb{RP}^2 , ale nikoli v \mathbb{R}^2 , takže je lze vyjádřit pouze rovnicí ve tvaru (2.12), ale rovnicí (2.11) už ne.

3. KONSTRUKCE KUŽELOSEČEK POMOCÍ VNĚJŠÍHO SOUČINU (WEDGE)

3.1. Pět různých bodů

Jak bylo již zmíněno, OPNS reprezentaci kuželosečky Q lze obecně získat jako wedge pěti různých bodů p_1, \dots, p_5 vnořených do GAC, tedy:

$$Q_O = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5.$$

Takto získaná kuželosečka poté prochází všemi pěti body, nebo – v některých případech – nemůže být geometricky jednoznačně určena; v takových případech platí

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 = 0.$$

Existenci, jednoznačnost a regularitu kuželosečky dané pomocí pěti bodů lze posoudit na základě největšího počtu kolineárních bodů v dané pětici, [24], jak je shrnuto v Tabulce 2.

Tabulka 1. Klasifikace kuželoseček v \mathbb{RP}^2 podle hodnoty jejich matic a pomocných veličin, [16, 7]

$h(M)$	$h(\bar{M})$	Další specifikace	Typ kuželosečky
3	2	$\frac{\Delta}{J} < 0$	reálná elipsa (reálná kružnice, pokud $q_{11} = q_{22}$ a $q_{12} = 0$)
		$\frac{\Delta}{J} > 0$	žádná reálná množina (imaginární elipsa)
		$\delta < 0$	hyperbola
	1		parabola
2	2	$\delta < 0$	dvě vlastní reálné různoběžky
		$\delta > 0$	vlastní reálný bod (dvě vlastní imaginární různoběžky)
	1	$\Delta' < 0$	dvě vlastní reálné rovnoběžky
		$\Delta' > 0$	nevlastní reálný bod (dvě vlastní imaginární rovnoběžky)
	0	vlastní přímka a nevlastní přímka	
1	1	dvojnásobná vlastní reálná přímka	
	0	dvojnásobná nevlastní přímka	

Prozkoumejme nyní několik příkladů konstrukce kuželosečky procházející 5 body pomocí GAC wedge³.

Příklad 3.1. Regulární kuželosečku danou 5 body v obecné lineární poloze (tj. žádné tři body nejsou kolineární) lze vidět na Obrázku 3 (a). Zvolené body mají souřadnice $(-1, -4)$, $(3, -2)$, $(3, 3)$, $(-2, 3)$ a $(-4, 0)$, jejich GAC reprezentanti jsou tedy

$$\begin{aligned}
 P_1 &= C(-1, -4) = \bar{n}_+ - e_1 - 4e_2 + \frac{17}{2}n_+ - \frac{15}{2}n_- + 4n_\times, \\
 P_2 &= C(3, -2) = \bar{n}_+ + 3e_1 - 2e_2 + \frac{13}{2}n_+ + \frac{5}{2}n_- - 6n_\times, \\
 P_3 &= C(3, 3) = \bar{n}_+ + 3e_1 + 3e_2 + 9n_+ + 9n_\times, \\
 P_4 &= C(-2, 3) = \bar{n}_+ - 2e_1 + 3e_2 + \frac{13}{2}n_+ - \frac{5}{2}n_- - 6n_\times,
 \end{aligned}$$

³Příklady uvedené v článku byly napočítány v softwaru MAPLE s pomocí balíčku „Clifford“, [1], který umožňuje výpočty v prostředí Cliffordových algeber.

Tabulka 2. Klasifikace kuželoseček daných pěti body

Největší počet kolineárních bodů	Vytvořená kuželosečka		
	existence	regularita	možné typy
2	jednoznačná	regulární	elipsa, hyperbola, parabola
3	jednoznačná	singulární	dvě různoběžky nebo rovnoběžky
4	nejednoznačná	singulární	dvě různoběžky nebo rovnoběžky
5	nejednoznačná	singulární	dvě různoběžky nebo rovnoběžky, dvojnásobná přímka

$$P_5 = C(-4, 0) = \bar{n}_+ - 4e_1 + 8n_+ + 8n_-,$$

a OPNS kuželosečka, která jimi prochází, má tvar 5-vektoru

$$Q_O = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 = -86\bar{n}_+e_1e_2n_+n_- + 7\bar{n}_+e_1e_2n_+n_x \\ + 469\bar{n}_+e_1e_2n_-n_x - 20\bar{n}_+e_1n_+n_-n_x + 27\bar{n}_+e_2n_+n_-n_x + 3588e_1e_2n_+n_-n_x.$$

Konverze do IPNS reprezentace pomocí rovnic (2.7), (2.8) pak dává 1-vektor

$$Q_I = (Q_O)^* = -86\bar{n}_x - 7\bar{n}_- + 469n_+ - 27e_1 - 20e_2 - 3588n_+$$

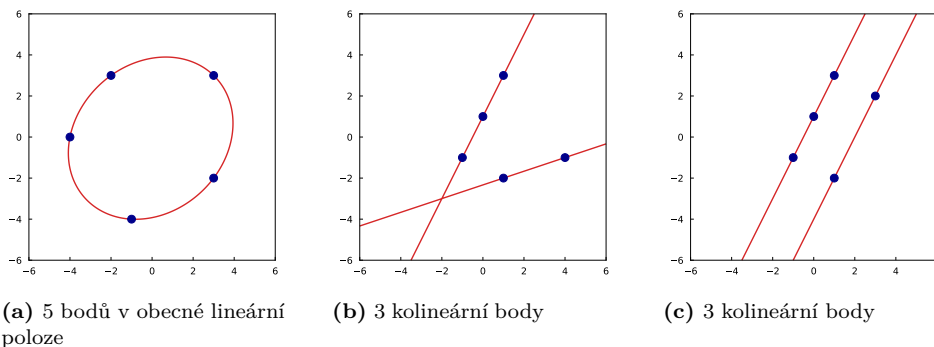
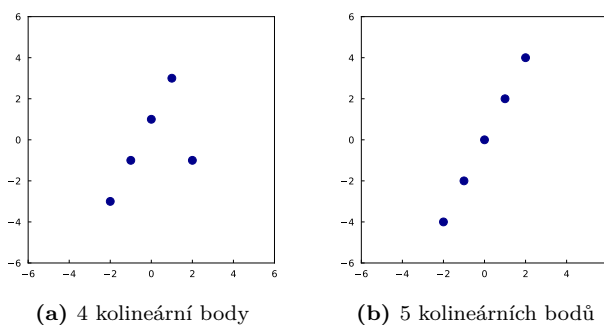
a po převodu do běžné rovnice dostáváme elipsu

$$Q : -231x^2 + 86xy - 238y^2 - 27x - 20y + 3588 = 0.$$

Pro větší stručnost uvádíme další ukázkou této konstrukce kuželosečky z pěti bodů bez detailnějšího popisu výpočtu.

Případy, kdy jsou 3 body z 5 kolineární, jsou v témže Obrázku, v částech (b) a (c) – v obou případech jsme zkonstruovali kuželosečku, která je jednoznačně určená, ale je singulární; konkrétně dvojici přímek (jedna přímka z dvojice je určena třemi kolineárními body a druhá přímka zbylými dvěma body).

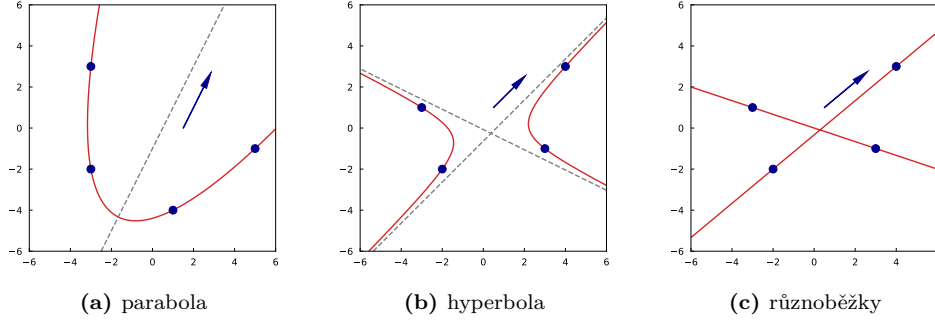
Pro úplnost uvedme také Obrázek 4, kde uvažujeme pětici bodů se 4, resp. s 5, kolineárními body – v obou případech by kuželosečka procházející všemi body musela být singulární (tedy dvojice přímek), ani v jednom z případů ale není určena jednoznačně, takže $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 = 0$. Důvod je tento: V podobrázku (a) jedna z přímek musí procházet 4 kolineárními body a druhá zbylým posledním bodem – směr této přímky však může být jakýkoli. Podobný úsudek si lze vytvořit o podobrázku (b) – 5 kolineárními body musí jedna ze dvou přímek projít, druhá však může mít jakoukoli polohu i směr.


Obrázek 3. Kuželosečky procházející 5 vlastními body

Obrázek 4. Pětice vlastních bodů se 4 a 5 kolineárními body. Kuželosečka procházející takovými množinami nemůže být určena jednoznačně.

Díky inkluzi nevlastních bodů do GAC navíc nemusíme jako body konstruované kuželosečky uvažovat jen vlastní body; vždyť některé kuželosečky, jako např. parabola, hyperbola nebo dvojice přímek, obsahují jeden či více nevlastních bodů.

Příklad 3.2. Příklad takto nalezené paraboly je na Obrázku 5 (a) – parabola prochází 4 vlastními body a 1 nevlastním bodem, který představuje směr její osy. Zde také poznamenejme, že wedge 4 vlastních a 1 nevlastního bodu vytvoří parabolu pouze za zvláštních podmínek, [17]. To, že wedge 4 vlastních a 1 nevlastního bodu může snadno vytvořit i jiné kuželosečky, je evidentní na podobrázcích (b) a (c) – v prvním případě dostáváme hyperbolu, jejíž jedna asymptota vede použitým nevlastním bodem; v druhém případě vzniká dvojice přímek, z nichž má jedna směr nevlastního bodu a spojuje 2 ze 4 vlastních bodů (druhá přímka pak nutně spojuje poslední 2 zbývající body).

Ukázky wedge 2 a více nevlastních bodů s vlastními body lze najít v disertační práci [17].



Obrázek 5. Kuželosečky procházející 4 vlastními a 1 nevlastním bodem

3.2. Čtyřbod a další bod

Připomeňme, že pomocí GAC se dá průnik dvou kuželoseček reprezentovat jako takzvaný *čtyřbod* ve tvaru (2.9). Protože čtyřbod je algebraicky ekvivalentní vnějšmu součinu čtyř individuálních bodů, lze ho také využít ke konstrukci kuželosečky procházející čtyřbodem a dalším bodem, který na průniku kuželoseček neleží. Velkou výhodou této reprezentace a konstrukce je, že takovou kuželosečku můžeme zkonstruovat, aniž bychom museli počítat polohu individuálních bodů průniku, a to podle následující věty, [17]:

Věta 3.3. *Nechť Q_I^1 a Q_I^2 jsou IPNS reprezentace dvou různých kuželoseček $Q^1, Q^2 \subset \mathbb{RP}^2$, a P_I je IPNS reprezentace bodu $p \in \mathbb{RP}^2$, který neleží na $Q^1 \cap Q^2$. Potom OPNS reprezentaci kuželosečky Q procházející průnikem $Q^1 \cap Q^2$ a bodem p lze vyjádřit jako*

$$Q_O = (Q_I^1 \wedge Q_I^2)^* \wedge P_I. \quad (3.1)$$

Příklad 3.4. Uvažujme dvě různé kuželosečky, konkrétně elipsu Q^1 a hyperbolu Q^2 s rovnicemi

$$Q^1: 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0,$$

$$Q^2: 44x^2 - 64xy - 4y^2 - 112x + 136y - 31 = 0,$$

IPNS reprezentacemi

$$Q_I^1 = -34\bar{n}_+ + 16\bar{n}_- + 225n_+,$$

$$Q_I^2 = 64\bar{n}_\times - 48\bar{n}_- - 40\bar{n}_+ - 112e_1 + 136e_2 + 31n_+,$$

a dále uvažujme body $p_1 = (-2, -6)$ a $p_2 = (6, 2)$ s IPNS reprezentacemi

$$P_I^1 = C(p_1) = \bar{n}_+ - 2e_1 - 6e_2 + 20n_+ - 16n_- + 12n_\times,$$

$$P_I^2 = C(p_2) = \bar{n}_+ + 6e_1 + 2e_2 + 20n_+ + 16n_- + 12n_\times.$$

Následně můžeme udělat wedge čtyřbodu $Q_I^1 \wedge Q_I^2$ s body P_I^1, P_I^2 podle (3.1), čímž získáme OPNS kuželosečky C^1, C^2 jako

$$C_O^1 = (Q_I^1 \wedge Q_I^2)^* \wedge P_I^1$$

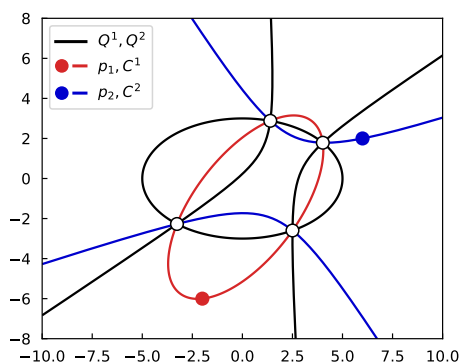
$$C_O^2 = (Q_I^1 \wedge Q_I^2)^* \wedge P_I^2.$$

Po konverzi do IPNS reprezentací dostáváme

$$C_I^1 = (C_O^1)^* = 2528\bar{n}_x - 688\bar{n}_- - 4147\bar{n}_+ - 4424e_1 + 5372e_2 + 18212n_+,$$

$$C_I^2 = (C_O^2)^* = 6368\bar{n}_x - 7728\bar{n}_- + 2293\bar{n}_+ - 11144e_1 + 13532e_2 - 38428n_+.$$

Výchozí situace a zkonstruované kuželosečky jsou k vidění na Obrázku 6.



Obrázek 6. Čtyřbod získaný jako průnik Q^1, Q^2 z Příkladu 3.4. Kuželosečky C^1 a C^2 byly vytvořeny jako wedge čtyřbodu s bodem p_1 , resp. p_2 .

Předtím, než použijeme tento způsob konstrukce k získání speciálních kuželoseček, zmiňme pojem úzce spojený se čtyřbodem a průnikem kuželoseček – *svazek kuželoseček*, [27, 8].

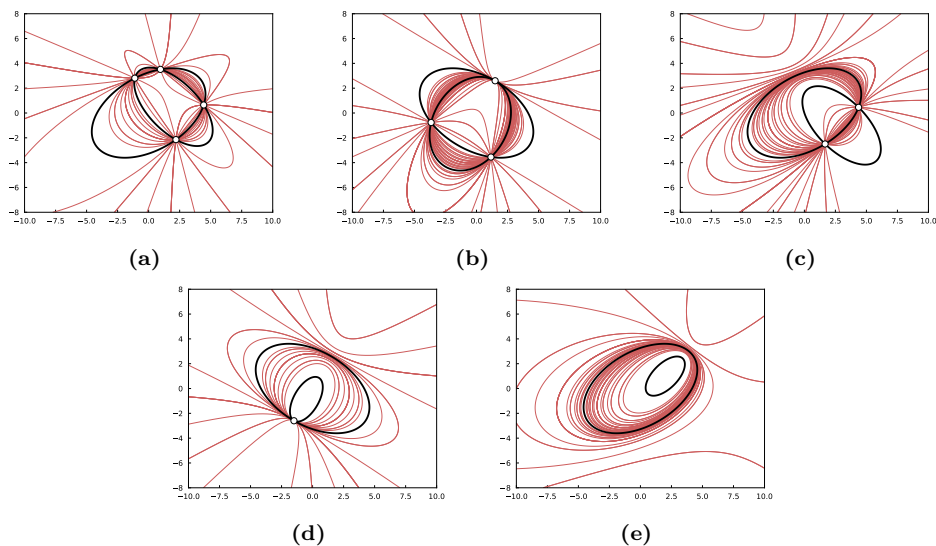
Definice 3.5. *Svazek kuželoseček* generovaný kuželosečkami Q^1 a Q^2 je množina všech kuželoseček procházejících skrz jejich společný průnik. Ekvivalentně se dá říct, že pokud jsou Q^1 a Q^2 reprezentovány rovnicemi $E_1 = 0$ a $E_2 = 0$, pak se dá svazek charakterizovat pomocí všech netriviálních lineárních kombinací rovnic $E_1 = 0$ a $E_2 = 0$, tedy

$$\{Q : \lambda E_1 + \mu E_2 = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}.$$

$E_1 = 0$ a $E_2 = 0$ jsou rovnice ve tvaru (2.11) nebo (2.12), a to podle toho, zda uvažujeme kuželosečky v \mathbb{R}^2 nebo v \mathbb{RP}^2 .

Průsečíkům obou generujících kuželoseček se pak říká *základní body* (volný překlad anglického „base points“), [24, 27, 3].

Poznámka 3.6. Z algebraického pohledu mají dvě kuželosečky vždy čtyři průsečíky, ačkoli některé z nich mohou být algebraicky vícenásobné a ne všechny musí být reálné. Je důležité si uvědomit, že všechny kuželosečky svazku, který je generován kuželosečkami Q^1 a Q^2 , procházejí všemi společnými průsečíky, a to i v případech, kdy nejsou všechny čtyři průsečíky reálné, zahrnujeme tedy i případy imaginárních průsečíků a navíc i průsečíky nevlastní. Příklad několika svazků kuželoseček s různým počtem reálných průsečíků lze vidět na Obrázku 7.



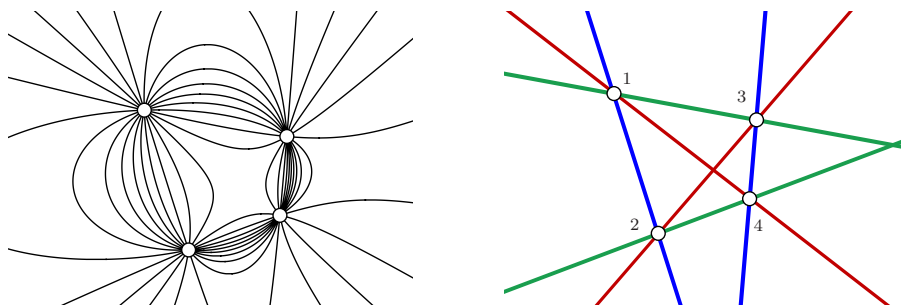
Obrázek 7. Svazky kuželoseček generované dvěma kuželosečkami. Případy 4 až 0 reálných průsečíků.

Se znalostí konceptu čtyřbodu a svazku kuželoseček můžeme tedy konstrukci kuželosečky pomocí vnějšího součinu čtyřbodu a dalšího bodu vnímat jako výběr jedné konkrétní kuželosečky ze svazku, která prochází jak čtyřbodem, tak zvoleným dalším bodem. V následujícím textu toho můžeme využít k nalezení geometricky významných kuželoseček, které se ve svazcích vyskytují.

3.2.1. Dvojice přímek ve svazku kuželoseček. Jednou z důležitých skupin kuželoseček vyskytujících se ve svazcích, je množina *singulárních kuželoseček*, která se skládá (až na speciální případy) z nejvýše tří *dvojic přímek*, jež procházejí všemi základními body svazku. Bod, kde se přímky z dané dvojice protínají, se pak nazývá *dvojitý bod* nebo *diagonální bod* (angl. *double point*, resp. *diagonal point*). Svazky tedy obvykle obsahují až tři dvojice přímek a odpovídající dvojitě body. Vyobrazení svazku a jeho dvojic přímek lze vidět na Obrázku 8. Zdůrazněme ještě, že základní body, dvojitě body a dvojice přímek svazku mohou být i imaginární, [27, 29, 8].

Jsou to právě dvojice přímek ve svazku, které se často používají k nalezení průsečíků dvou kuželoseček, [27, 2, 3]. Nejobvyklejším způsobem nalezení dvojic přímek ve svazku je využití faktu, že singulární kuželosečky jsou reprezentovány singulární maticí. Protože každá kuželosečka Q ze svazku generovaného kuželosečkami Q^1 a Q^2 může být vyjádřena jako lineární kombinace těchto kuželoseček, totéž platí i pro jejich maticové reprezentace. Jestliže tedy označíme matice kuželoseček Q^1 a Q^2 jako M_1 a M_2 , pak maticí kuželosečky Q je $M = \lambda M_1 + \mu M_2$. Z toho plyne, že aby Q byla singulární, musí platit

$$\det(M) \equiv \det(\lambda M_1 + \mu M_2) = 0,$$



Obrázek 8. Svazek kuželoseček procházející čtyřmi základními body a jeho tři singulární kuželosečky, tj. dvojice přímek ([27])

což představuje kubickou rovnici v proměnných λ a μ . Jeden z algoritmů na řešení této rovnice je detailně popsán v knize [27].

Nyní ale popišme i jiný – geometricky motivovaný – způsob nalezení dvojic přímek ve svazku: Protože každá dvojice přímek ve svazku prochází základními body svazku (reprezentovanými čtyřbodem) a zároveň svým dvojitým bodem, můžeme každou dvojici přímek zkonstruovat jako vnější součin čtyřbodu svazku a dvojitého bodu dané dvojice přímek.

I když je myšlenka takové konstrukce poměrně jednoduchá, nalezení dvojitých bodů svazku není zdaleka tak zřejmé. Naštěstí bylo ukázáno, že dvojitě body svazku lze vypočítat pomocí tzv. *polarity* kuželoseček, [9].

Definice 3.7. Necht Q je kuželosečka v \mathbb{RP}^2 reprezentovaná maticí M a $p = (x_p, y_p, z_p)^T$ je homogenní bod v \mathbb{RP}^2 . Dále (zneužitím značení) ztotožňme homogenní přímku $l : ax + by + cz = 0$ s vektorem jejích koeficientů, tj. $l = (a, b, c)^T$. Potom se homogenní přímka $l = Mp$ nazývá *polára* bodu p vůči kuželosečce Q a bod p se nazývá *pól*, [27].

Definice 3.8. Necht Q je kuželosečka a p_1, p_2, p_3 jsou tři homogenní body v \mathbb{RP}^2 . Jestliže polára každého z těchto bodů prochází zbývajícím dvěma body, pak se trojúhelníku $\Delta p_1 p_2 p_3$ říká *autopolární trojúhelník*⁴ kuželosečky Q , [9].

Dále, necht Q^1 a Q^2 jsou dvě kuželosečky a p_1, p_2, p_3 jsou tři homogenní body v \mathbb{RP}^2 . Jestliže body p_1, p_2, p_3 tvoří autopolární trojúhelník obou kuželoseček současně, trojúhelník se pak nazývá *společný autopolární trojúhelník* kuželoseček Q^1 a Q^2 .

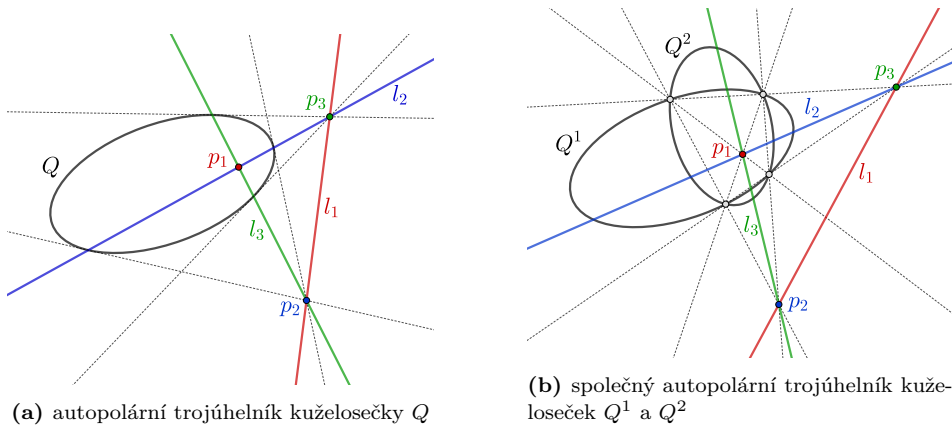
Věta 3.9. Dvojitě body svazku kuželoseček tvoří vrcholy společného autopolárního trojúhelníka generujících kuželoseček Q^1 a Q^2 , [28].

Díky autopolaritě dvojitých bodů svazku můžeme jejich výpočtu dosáhnout za pomoci následující věty:

⁴Anglický název pojmu je „self-polar triangle“; český ekvivalent se nepodařilo najít, proto volně překládáme „self-polar“ jako „autopolární“.

Věta 3.10. *Nechť Q^1 a Q^2 jsou generující kuželosečky svazku kuželoseček a M_1 a M_2 jsou jejich matice. Potom platí, že pokud společný autopolární trojúhelník kuželoseček Q^1 a Q^2 existuje, tak jeho vrcholy se dají vypočítat jako vlastní vektory p zobecněné úlohy vlastních čísel a vlastních vektorů*

$$M_1 p = \lambda M_2 p. \quad (3.2)$$



Obrázek 9. Autopolární trojúhelníky. (a) Prerušované přímky jsou tečny vedené z pólů ke kuželosečce (polary protínají kuželosečku právě v bodech dotyku). (b) Prerušované čáry značí dvojice přímek ve svazku generovaném dvěma kuželosečkami.

Abychom nyní zkonstruovali dvojice přímek ve svazku generovaném kuželosečkami Q^1 a Q^2 , vypočteme dvojitě body svazku jako vlastní vektory úlohy (3.2) a vytvoříme vnější součin jejich GAC reprezentantů se čtyřbodem $Q^1 \wedge Q^2$ jako v rovnici (3.1). Jinými slovy, OPNS reprezentaci i -té dvojice přímek svazku najdeme jako

$$LP_O^i = (Q_I^1 \wedge Q_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(p_i).$$

Příklad 3.11. Uvažujme dvě elipsy E^1, E^2 s rovnicemi

$$E^1: 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0,$$

$$E^2: 4x^2 + y^2 - 16x - 2y + 1 = 0,$$

s IPNS reprezentacemi

$$E_I^1 = 16\bar{n}_- - 34\bar{n}_+ + 225n_+,$$

$$E_I^2 = -3\bar{n}_- - 5\bar{n}_+ - 16e_1 - 2e_2 - n_+,$$

a maticemi

$$M_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -225 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešením zobecněného problému vlastních čísel a vlastních vektorů (3.2) pak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 13.0501 \\ 21.6502 \\ 2.7997 \end{pmatrix}, \quad (p_1 \ p_2 \ p_3) \approx \begin{pmatrix} 2.4167 & 2.2320 & 10.1865 \\ -1.0921 & -6.4631 & -0.1261 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a IPNS reprezentace dvojitých bodů P_1, P_2, P_3 hledaných dvojic přímek spočítáme vnořením získaných vlastních vektorů do GAC, tedy

$$P_i = C\mathbb{P}(p_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Nakonec získáváme každou dvojici přímek ve svazku podle konstrukce (3.1):

$$LP_O^i = (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge P_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

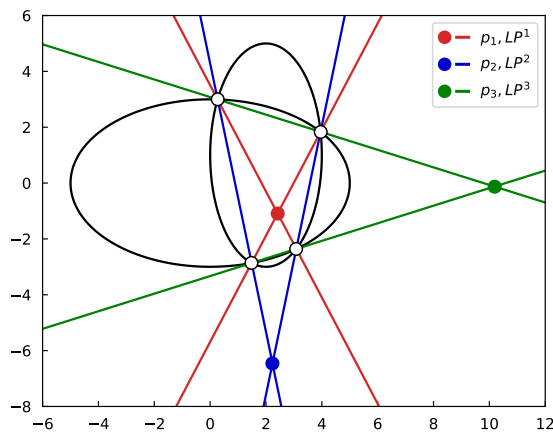
Po konverzi do IPNS reprezentací dostáváme dvojice přímek:

$$LP_I^1 \approx -6181.408\bar{n}_- + 5067.328\bar{n}_+ - 11348.626e_1 - 1418.578e_2 - 57712.203n_+,$$

$$LP_I^2 \approx 602.728\bar{n}_- + 341.532\bar{n}_+ + 2281.956e_1 + 285.245e_2 + 2601.605n_+,$$

$$LP_I^3 \approx -3231.034\bar{n}_- - 2963.629\bar{n}_+ - 13826.218e_1 - 1728.277e_2 - 9844.710n_+.$$

Obě generující kuželosečky svazku, jeho čtyřbod a nalezené dvojice přímek jsou k vidění na Obrázku 10.



Obrázek 10. Čtyřbod získaný jako průnik kuželoseček z Příkladu 3.11. Každá ze tří dvojic přímek byla získána jako vnější součin čtyřbodu a příslušného dvojitého bodu.

V některých úlohách může být pak hledání dvojic přímek obzvláště jednoduché, např. pokud jsou dvě generující kuželosečky soustředné, jak můžeme vidět v následujícím příkladu.

Příklad 3.12. Uvažujme dvě soustředné elipsy E^1, E^2 z Obrázku 11 (a). Protože obě jsou soustředné, je zřejmé, že jejich průsečíky (reprezentované čtyřbodem) jsou souměrné vůči společnému středu; jedna z hledaných dvojic přímek tedy musí procházet jak čtyřbodem, tak středem, který je v tomto případě bod $(0, 0, 1)$. Díky soustřednosti také platí, že zbývající dvojice přímek se skládají z rovnoběžek, a jejich dvojitě body jsou tedy nevlastní. Ve zvoleném případě mají navíc obě generující elipsy osy rovnoběžné se souřadnými osami, tudíž i rovnoběžky dvojic přímek povedou rovnoběžně se souřadnými osami – nevlastní bod osy x lze zapsat jako $(1, 0, 0)$ a nevlastní bod osy y jako $(0, 1, 0)$. Díky takovému rozložení lze v tomto případě najít dvojice přímek generovaného svazku bez nutnosti počítat jakékoli vlastní vektory – konstrukce pomocí vnějšího součinu pak vypadá následovně:

$$\begin{aligned} LP_O^1 &= (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(0, 0, 1), \\ LP_O^2 &= (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(0, 1, 0), \\ LP_O^3 &= (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(1, 0, 0). \end{aligned}$$

Elipsy E^1, E^2 na Obrázku 11 (b) mají také společný střed $(0, 0, 1)$, jedna z elips je ale natočená o 30° . Situace je skoro stejná jako předtím: Jedna z dvojic přímek půjde společným středem, a zbývající dvě dvojice budou tvořit rovnoběžky; tyto rovnoběžky už ale nepůjdou ve směrech souřadných os, ale jejich nevlastní body musí být spočítány pomocí úlohy (3.2). Výsledné vlastní vektory pak vycházejí jako

$$(p_1 \quad p_2 \quad p_3) \approx \begin{pmatrix} 0 & -0.2525 & 2.2281 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a konstrukce dvojic přímek je pak dána vztahy

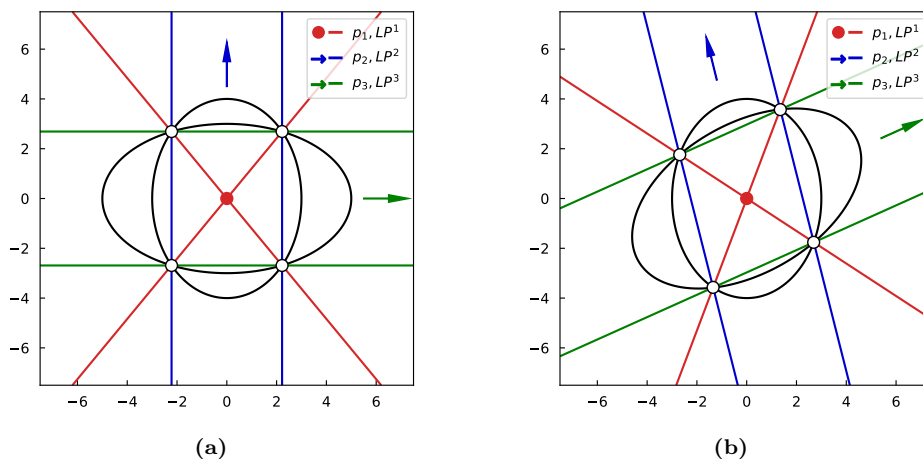
$$\begin{aligned} LP_O^1 &= (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(p_1), \\ LP_O^2 &= (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(p_2), \\ LP_O^3 &= (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(p_3). \end{aligned}$$

Poznámka 3.13. Na závěr podpodseky poznamenejme, že konstrukce dvojic přímek demonstrováním způsobem není možná pro některé ze svazků, jejichž generující kuželosečky jsou vůči sobě ve speciálních polohách; pro detaily viz [17].

3.2.2. Zobecněné paraboly ve svazcích kuželoseček. Další význačnou skupinou kuželoseček ve svazcích jsou tzv. *zobecněné paraboly*. Jak bude detailněji popsáno dále v textu, svazek kuželoseček může obsahovat právě žádnou, jednu, dvě, nebo (ve velice speciálních případech) nekonečné množství zobecněných parabol; nejobvyklejším případem ale budou dvě zobecněné paraboly, [17].

Připomeňme, že parabola je regulární, nestředová kuželosečka. Pokud je tedy reprezentována maticí M a hlavní podmaticí \bar{M} , platí

$$\det(M) \neq 0, \quad \det(\bar{M}) = 0.$$



Obrázek 11. Čtyřbod jako průsečík dvou soustředných kuželoseček z Příkladu 3.12. Jedna z vyobrazených dvojic přímek vznikla jako wedge čtyřbodu a společného středu kuželoseček, další dvojice pak jako wedge čtyřbodu s příslušným nevlastním bodem.

Na druhou stranu, stejně jako hyperbola jakožto regulární kuželosečka může „zdegenerovat“ v dvojici různoběžek (tedy kuželosečku singulární), tak může „zdegenerovat“ parabola, jmenovitě do dvojice rovnoběžek či jedné dvojnásobné přímky (tato dvojnásobná přímka navíc může být nevlastní). Když budeme tedy hledat paraboly ve svazcích kuželoseček, nebudeme se omezovat jen na paraboly v obvyklém smyslu slova, ale zahrneme všechny nestředové kuželosečky, a to jak regulární, tak singulární. Zobecněné paraboly jsou tedy všechny kuželosečky vyhovující vztahům

$$M \neq 0, \quad (3.3)$$

$$\det(\bar{M}) = 0. \quad (3.4)$$

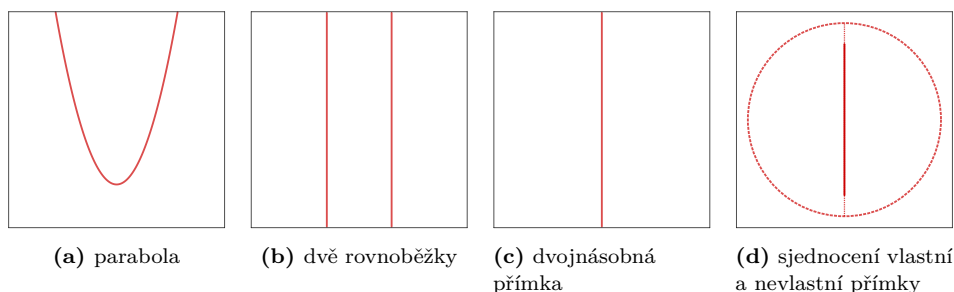
Kromě zmíněných zobecněných parabol navíc můžeme uvažovat i dvojici přímek, z nichž je jedna vlastní a druhá nevlastní, neboť taková dvojice také splňuje rovnosti (3.3) a (3.4).

Přehled všech typů zobecněných parabol lze vidět na Obrázku 12 (nevlastní přímka je v podobrázku (d) znázorněna jako přerušovaná kružnice, protože ji můžeme vnímat jako nekonečně velkou kružnici obepínající reálnou rovinu \mathbb{R}^2).

Jak bylo ukázáno v disertační práci [17], počet zobecněných parabol ve svazku generovaném kuželosečkami Q^1 a Q^2 lze jednoznačně určit na základě jejich matic a podmatic, a to podle následující věty.

Věta 3.14. *Uvažujme kuželosečky Q^1 a Q^2 reprezentované maticemi M_1 a M_2 tvaru (2.10) a hlavními podmaticemi \bar{M}_1 a \bar{M}_2 tvaru (2.13). Dále definujme matici*

$$N = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \delta_2 \end{pmatrix},$$



Obrázek 12. Typy zobecněných parabol

kde

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \det(\bar{M}_1), \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(\bar{M}_1) \bar{M}_2), \\ \delta_2 &= \det(\bar{M}_2).\end{aligned}$$

Potom počet zobecněných parabol ve svazku generovaném kuželosečkami Q^1 a Q^2 může být určen na základě matic M_1 , M_2 a N podle přehledu v Tabulce 3.

Tabulka 3. Počet zobecněných parabol ve svazku generovaném kuželosečkami Q^1 a Q^2 s maticemi M_1 a M_2 podle jejich vztahu a vůči matici N . Označení případů zvýrazněno tučně. Případy se značkou „–“ nejsou algebraicky možné.

	$M_2 \neq kM_1,$ $k \neq 0$	$M_2 = kM_1,$ $k \neq 0$
$\det(N) < 0$	A1 2 reálné paraboly	B1 –
$\det(N) = 0,$ $N \neq 0$	A2 1 reálná parabola	B2 žádná parabola
$\det(N) > 0$	A3 žádná reálná parabola (2 imaginární paraboly)	B3 –
$N = 0$	A4 nekonečné množství různých reálných parabol	B4 identické reálné paraboly Q^1 a Q^2

Díky klasifikaci možných případů můžeme nyní více diskutovat různé situace, které mohou při konstrukci zobecněných parabol ve svazcích nastat. Podobně jako v předchozím oddíle, i zde budeme křivky hledat jako wedge čtyřbodu $Q_I^1 \wedge Q_I^2$ a dalšího bodu. Každá zobecněná parabola (kromě těch, které obsahují nevlastní

přímku) prochází právě jedním nevlastním bodem, který je asociovaný se směrem osy zobecněné paraboly – z tohoto důvodu je přirozené konstruovat vnější součin čtyřbodu a právě tohoto nevlastního bodu. Jak bude zanedlouho ukázáno, způsob výpočtu nevlastních bodů zobecněných parabol má podobnou strukturu jako výpočet dvojitých bodů dvojic přímek. Tyto nevlastní body můžeme nalézt pomocí tzv. *sdužených průměrů* a *sdužených směrů*.

Definice 3.15. Přímce d se říká *průměr* kuželosečky Q , jestliže je polárou nějakého nevlastního bodu vůči kuželosečce Q . Ekvivalentně se dá říct, že průměr je jakákoliv přímka procházející středem kuželosečky.

Dvěma průměrům d_1 a d_2 kuželosečky Q se říká *sdužené*, jestliže oba průměry jsou polárou nevlastního bodu druhého průměru vůči Q .

Pokud jsou navíc průměry d_1 a d_2 sdužené vůči kuželosečkám Q^1 a Q^2 současně, říká se jim *společné sdužené průměry* kuželoseček Q^1 a Q^2 , [10, 15].

Definice 3.16. Uvažujme kuželosečku Q a dva směry $\bar{p}_{\infty 1} = (x_{p_{\infty 1}}, y_{p_{\infty 1}})^T$ a $\bar{p}_{\infty 2} = (x_{p_{\infty 2}}, y_{p_{\infty 2}})^T$. Potom $\bar{p}_{\infty 1}$ a $\bar{p}_{\infty 2}$ se nazývají *sdužené směry* kuželosečky Q , jestliže jsou směry jejich sdužených průměrů.

Pokud jsou navíc směry $\bar{p}_{\infty 1}$ a $\bar{p}_{\infty 2}$ sdužené vůči kuželosečkám Q^1 a Q^2 současně, říká se jim *společné sdužené směry* kuželoseček Q^1 a Q^2 , [17].

Lze ukázat, že svazek má (obvykle dva) sdužené směry společné všem kuželosečkám ve svazku, takže i generujícím kuželosečkám Q^1 a Q^2 . Tyto směry jsou zároveň směry nevlastních bodů zobecněných parabol. Lze je – stejně jako dvojitě body předtím – najít pomocí zobecněného problému vlastních čísel a vlastních vektorů podle následující věty, [17].

Věta 3.17. *Nechť Q^1 a Q^2 jsou generující kuželosečky svazku kuželoseček a \bar{M}_1 a \bar{M}_2 jsou jejich hlavní podmatice. Potom platí, že pokud společné sdužené směry kuželoseček Q^1 a Q^2 existují, tak se dají vypočítat jako vlastní vektory \bar{p}_{∞} zobecněné úlohy vlastních čísel a vlastních vektorů*

$$\bar{M}_1 \bar{p}_{\infty} = \lambda \bar{M}_2 \bar{p}_{\infty}. \quad (3.5)$$

Abychom nyní mohli zkonstruovat zobecněné paraboly ve svazku generovaném kuželosečkami Q^1 a Q^2 , musíme nejdříve najít společné sdužené směry $\bar{p}_{\infty j}$ podle (3.5), přidáním nulové třetí souřadnice z nich vytvořit nevlastní body $p_{\infty j}$ a nakonec jejich GAC reprezentanty „vywedgovat“ se čtyřbodem $Q^1 \wedge Q^2$ jako v (3.1). Řečeno matematictěji, OPNS reprezentaci j -té zobecněné paraboly P^j svazku můžeme najít jako

$$P_O^j = (Q_I^1 \wedge Q_I^2)^* \wedge C\mathbb{P}(p_{\infty j}). \quad (3.6)$$

Nyní demonstrujeme konstrukci zobecněných parabol na konkrétních příkladech. Kvůli stručnosti textu uvádíme konstrukci detailně pouze u jednoho příkladu; konstrukce u dalších příkladů by byly analogické a jejich výsledek je v textu doprovoben obrázkem a alespoň stručným komentářem. Pro zevrubnější diskuzi příkladů viz [17].

Příklad 3.18. (1) Uvažujme E^1, E^2 s rovnicemi

$$E^1: -13x^2 + 8xy\sqrt{3} - 21y^2 + 225 = 0,$$

$$E^2: -20x^2 - 24xy - 20y^2 + 92x + 68y + 19 = 0,$$

s IPNS reprezentacemi

$$E_I^1 = -8\sqrt{3}\bar{n}_x - 8\bar{n}_- + 34\bar{n}_+ - 225n_+,$$

$$E_I^2 = 24\bar{n}_x + 40\bar{n}_+ + 92e_1 + 68e_2 - 19n_+,$$

a hlavními podmaticemi

$$\bar{M}_1 = \begin{pmatrix} -13 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -21 \end{pmatrix}, \quad \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} -20 & -12 \\ -12 & -20 \end{pmatrix}.$$

Řešení zobecněného problému vlastních čísel a vlastních vektorů (3.5) dává

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.2916 \\ 3.0142 \end{pmatrix}, \quad (\bar{p}_{\infty 1} \quad \bar{p}_{\infty 2}) \approx \begin{pmatrix} 1.4547 & -0.9115 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

IPNS reprezentace nevlastních bodů $p_{\infty 1}$ a $p_{\infty 2}$ asociovaných se směry $\bar{p}_{\infty 1}$ a $\bar{a}_{\infty 2}$ os hledaných zobecněných parabol je jejich vnořením do GAC, tedy

$$P_{\infty j} = C\mathbb{P}(p_{\infty j}), \quad j = 1, 2.$$

Zobecněné paraboly P^j jsou nakonec zkonstruovány pomocí wedge podle (3.1) jako

$$P_O^j = (E_I^1 \wedge E_I^2)^* \wedge P_{\infty j}, \quad j = 1, 2.$$

Po konverzi do IPNS reprezentace dostáváme zobecněné paraboly ve tvarech

$$P_I^1 \approx -20.2775\bar{n}_x - 7.7786\bar{n}_- + 21.7183\bar{n}_+ - 26.0840e_1 - 19.2795e_2 - 213.3868n_+,$$

$$P_I^2 \approx -12.7058\bar{n}_x - 1.1792\bar{n}_- - 12.7604\bar{n}_+ - 40.8760e_1 - 30.2127e_2 - 24.7243n_+.$$

Obě elipsy, čtyřbod a nalezené zobecněné paraboly se svými osovými směry lze vidět na Obrázku 13 (a).

Mimoto ještě poznamenejme, že tento příklad skutečně představuje případ A1 z klasifikace podle Tabulky 3, tj. dvě různé reálné paraboly ve svazku generovaném kuželosečkami Q^1 a Q^2 . To se dá ukázat i algebraicky, protože elipsy E^1 a E^2 jsou zřejmě různé (takže jejich matice nejsou nenulovým násobkem té druhé) a matice N formy (3.14) je

$$N = \begin{pmatrix} 225 & 340 + 48\sqrt{3} \\ 340 + 48\sqrt{3} & 256 \end{pmatrix},$$

takže $\det(N) < 0$. Kromě toho uvedme stručně i příklady případů A2, A3 a A4.

(2) Uvažujme dvě hyperboly H^1, H^2 z Obrázku 13 (b). Tyto hyperboly se vyznačují tím, že mají obě jeden společný nevlastní bod, který je zároveň nevlastním bodem $p_{\infty 1}$ jediné paraboly ze svazku, který tyto hyperboly generují. V tomto svazku se tedy nachází pouze jedna reálná parabola, která ale nemůže být výše

popsaným způsobem zkonstruovaná, protože obě hyperboly se protínají ve společném nevlastním bodě, který splývá s bodem $p_{\infty 1}$; platí tedy $(H_I^1 \wedge H_I^2)^* \wedge P_{\infty 1} = 0$. Další výpočet by potvrdil, že se jedná o případ A2.

(3) Uvažujme dvě hyperboly H^1, H^2 z Obrázku 13 (c). Tyto kuželosečky se protínají ve čtyřech reálných bodech, které ale dohromady tvoří nekonvexní čtyřúhelník, a snadno tedy nahlédneme, že skrze tyto čtyři body nelze proložit žádnou reálnou parabolou. Výpočet by v této konfiguraci vyústil ve dvě imaginární paraboly, tedy případ A3.

(4) Nakonec prozkoumejme ještě svazek generovaný parabolami Q^1, Q^2 na Obrázku 13 (d), které mají rovnoběžné osy – v takovém případě svazek obsahuje nekonečné množství zobecněných parabol. Zajímavé také je, že zobecněnému problému (3.5) může odpovídat jakýkoliv nenulový vlastní vektor. Pokusíme-li se o konstrukci zobecněné paraboly pomocí nevlastního bodu $p_{\infty 1}$, který je asociovaný se směrem osy y , pak konstrukce selže, protože je to zároveň nevlastní průsečík obou parabol, takže $(Q_I^1 \wedge Q_I^2)^* \wedge P_{\infty 1} = 0$. Na druhou stranu, pokud utvoříme vnější součin čtyřbodu s jakýmkoli jiným nevlastním bodem, dostaneme zobecněnou parabolou, která se skládá z jedné vlastní přímky (spojující vlastní průsečíky obou parabol) a nevlastní přímky. Lze ukázat, že jde o případ A4.

Aby příklady k možným případům z Tabulky 3 byly kompletní, ukažme ještě B2 a B4.

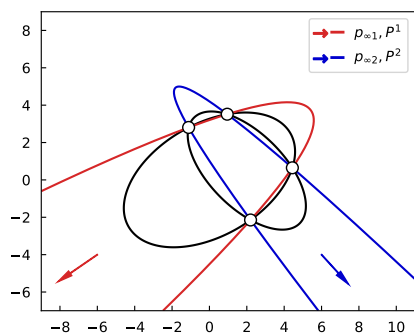
Příklad 3.19. (1) Uvažujme dvě hyperboly H^1, H^2 z Obrázku 14 (a), jejichž rovnice se liší pouze v násobku, takže představují obě stejnou hyperbolu. V této speciální situaci se svazek skládá jen z hyperboly samotné, takže svazek neobsahuje žádnou zobecněnou parabolou a jedná se o případ B2.

(2) Necht P^1, P^2 jsou geometricky shodné paraboly z Obrázku 14 (b), jejichž rovnice se taktéž liší jen násobkem. V tomto případě se svazek skládá jen z paraboly samotné, která je jedinou zobecněnou parabolou svazku, a není tedy potřeba žádnou parabolou konstruovat (případ B4).

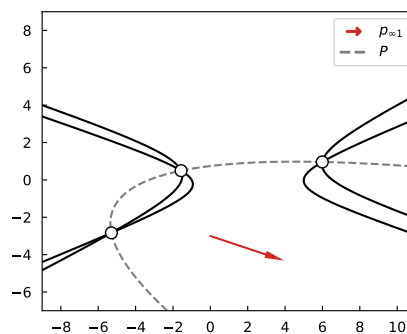
Protože konstrukce zobecněných parabol se ukazuje jako zvláště užitečná a elegantní v případech A1 (tedy, když jsou ve svazku právě dvě různé reálné paraboly), uveďme na závěr pár dalších příkladů této kategorie.

Příklad 3.20. (1) Ukažme si dva příklady, ve kterých oba páry kuželoseček mají čtyři různé průsečíky (Obrázek 15 (a,b)). V prvním se kuželosečky protínají ve dvou reálných a imaginárních bodech, i tak se ale pomocí našeho postupu podařilo spočítat osové směry i příslušné paraboly generovaného svazku. Druhý případ je překvapivější – kuželosečky nemají žádné reálné průsečíky (všechny čtyři jsou imaginární), i tak se ale povedlo zkonstruovat dvě paraboly generovaného svazku.

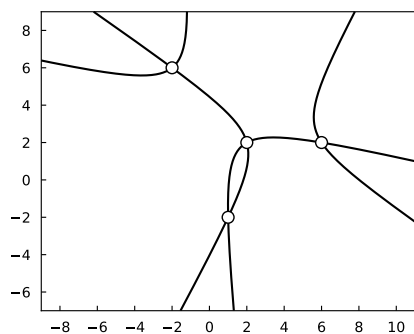
(2) Uvažujme ještě čtyři další příklady, ve kterých jsou generující kuželosečky vůči sobě ve speciálních polohách (Obrázek 15 (c)–(f)). Ve všech případech je ale spoň jeden z průsečíků vícenásobným bodem dotyku, konstrukce parabol svazku



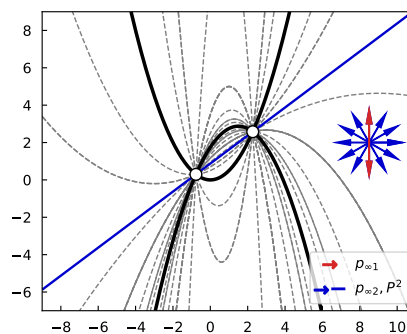
(a) A1 – dvě různé reálné paraboly



(b) A2 – jedna reálná parabola



(c) A3 – žádná reálná parabola (dvě různé imaginární paraboly)



(d) A4 – nekonečné množství reálných parabol (svazek obsahuje jen zobecněné paraboly)

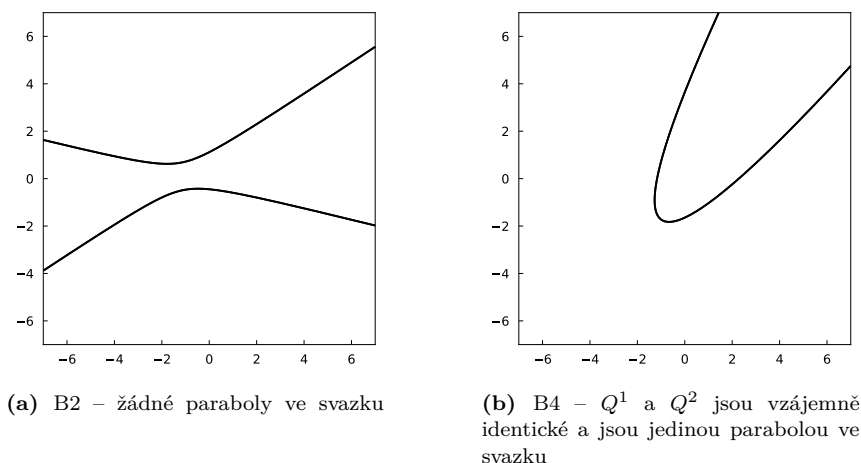
Obrázek 13. Kuželosečky z Příkladu 3.18, jejich průsečíky a paraboly generovaného svazku. Přerušované paraboly nelze námi popsanou konstrukcí (3.6) sestrojít.

byla ale všude úspěšná. Jak je vidět na obrázcích, kromě běžných parabol se v takových situacích můžeme setkat i s parabolami v obecnějším smyslu, jako jsou rovnoběžky nebo dvojnásobná přímka.

Výpočet matice N by potvrdil, že všechny tyto příklady skutečně spadají do kategorie A1, tedy dvě různé reálné paraboly ve svazku.

Poznámka 3.21. Jestliže byly nějaké konstrukce parabol uvažovány v příbuzné literatuře, obvykle se zabývaly konstrukcí paraboly skrz čtyři vlastní body. Pravděpodobně prvním, kdo se takovou konstrukcí zabýval, byl Isaac Newton v díle *Arithmetica Universalis*, [23], kde představil geometrický způsob nalezení směrů os parabol, které skrz čtyři vlastní body vedou.

Tento problém byl pak znovu diskutován v [5], kde kromě zopakování Newtonova přístupu bylo také ukázáno, že tyto paraboly jsou až na výjimky právě dvě.



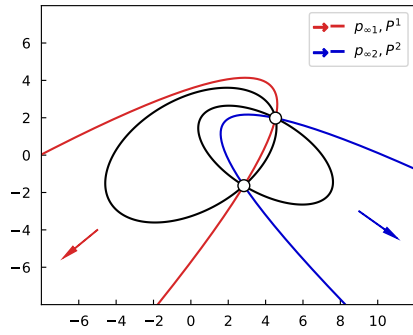
Obrázek 14. Kuželosečky z Příkladu 3.19 a jimi generované svazky. Vyobrazené kuželosečky Q^1 a Q^2 jsou geometricky identické, takže generují pouze samy sebe a jsou jedinou kuželosečkou ve svazku.

Explicitní výpočet rovnic parabol skrz čtyři body byl pak uveden v [21], kde se problém studoval s ohledem na konvexitu čtyřúhelníku tvořeného těmito body.

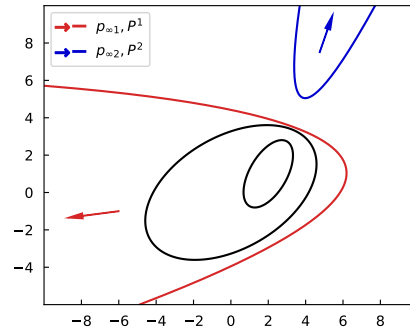
Všechny zmíněné zdroje mají však společné to, že ke konstrukci parabol používaly známé body a nijak nezkoumaly (zobecněné) paraboly, které se vyskytují ve svazcích kuželoseček a které přirozeně se čtyřbodem souvisí. Snad jediný zdroj, který se tématu lehce dotkl, je kniha [8], ve které byl nějaký příklad parabol ve svazku prezentován. Jedním z cílů článku bylo tedy také seznámit čtenáře se zobecněnými parabolami jako s něčím, čemu se doposud nedostalo náležitě pozornosti.

REFERENCE

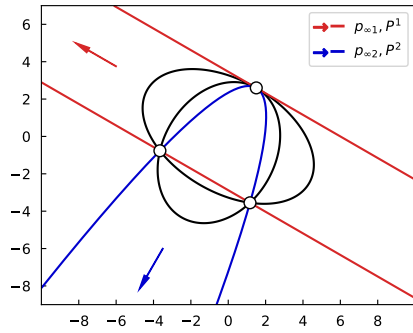
- [1] R. Ablamowicz, R. Fauser: *Mathematics of Clifford - a Maple package for Clifford and Grassmann algebras*, Advances in Applied Clifford Algebras **15.2** (2005), 157–181.
- [2] R. Byrtus, A. Derevianko, P. Vašík, D. Hildenbrand, C. Steinmetz: *On specific Conic intersections in GAC and symbolic calculations in GAALOPWeb*, Advances in Applied Clifford Algebras **32.2** (2022).
- [3] C. Chomicki, S. Breuils, V. Biri, V. Nozick: *Intersection of Conic Sections Using Geometric Algebra*, Advances in Computer Graphics (2024), 175–187.
- [4] C. Doignon, M. De Mathelin: *A Degenerate Conic-Based Method for a Direct Fitting and 3-D Pose of Cylinders with a Single Perspective View*, Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation (2007), 4220–4225.
- [5] H. Dorrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Mineola, 1965.
- [6] J. W. Downs: *Practical conic sections: the geometric properties of ellipses, parabolas and hyperbolas*, Mineola, 2003.
- [7] C. G. Gibson: *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*, Cambridge 1999.
- [8] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics: From the ancient Greeks to 21st century developments*, Heidelberg, 2024.



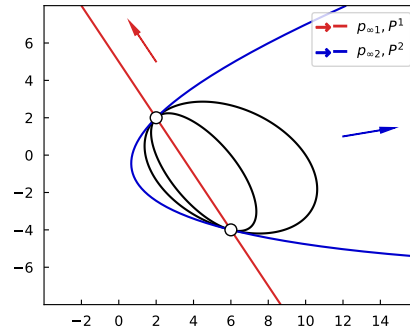
(a) 2 reálné a 2 imaginární průsečíky



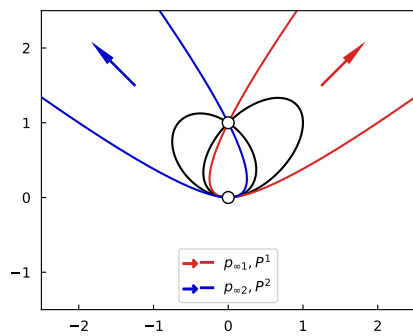
(b) 4 imaginární průsečíky



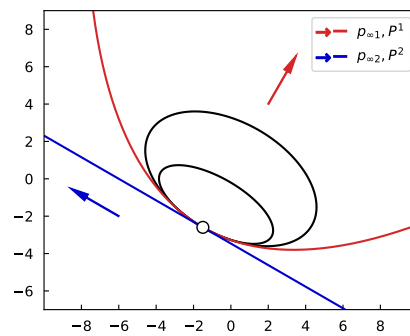
(c) 1 dvojnásobný bod dotyku



(d) 2 dvojnásobné body dotyku



(e) 1 trojnásobný bod dotyku



(f) 1 čtyřnásobný bod dotyku

Obrázek 15. Kuželosečky z Příkladu 3.20 v různých vzájemných polohách. Zobecněné paraboly generovaných svazků.

- [9] Y. Guo: *Homography Estimation from Ellipse Correspondences Based on the Common Self-polar Triangle*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **62** (2020), 169-188.
- [10] G. B. Halsted: *Synthetic Projective Geometry*, Hoboken, 1906.
- [11] R. Hartley, A. Zisserman: *Multiple view geometry in computer vision*, Cambridge, 2000.
- [12] J. Hrdina, A. Návrat, P. Vašík: *Geometric algebra for Conics*, Advances in Applied Clifford Algebras **28.66** (2018).
- [13] J. Hrdina, A. Návrat, P. Vašík: *Conic fitting in geometric algebra setting*, Advances in Applied Clifford Algebras **29.72** (2019).
- [14] H. Huang: *The common self-polar triangle of conics and its applications to computer vision*, disertační práce, 2017.
- [15] J. Janyška, A. Sekaninová: *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, Brno, 2001
- [16] G. A. Korn: *Mathematical handbook for scientists and engineers*, Mineola, 1961.
- [17] P. Loučka: *Algorithms for Conics in Geometric Algebras*, disertační práce, 2024.
- [18] P. Loučka: *On Proper and Improper Points in Geometric Algebra for Conics and Conic Fitting Through Given Waypoints*, Lecture Notes in Computer Science (2023), 67–79.
- [19] P. Loučka, P. Vašík: *Algorithms for Conic Fitting Through Given Proper and Improper Waypoints in Geometric Algebra for Conics*, Advances in Applied Clifford Algebras **34** (2024).
- [20] P. Lounesto: *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge, 1997.
- [21] K. R. McLean: *Conics and convexity*, The Mathematical Gazette **98.542** (2014), 266–272.
- [22] X. Meng, Z. Hu: *A new easy camera calibration technique based on circular points*, Pattern Recognition **36.5** (2003), 1155–1164.
- [23] I. Newton: *Arithmetica universalis: sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, 1707.
- [24] P. Pamfilos: *A Gallery of Conics by Five Elements*, Forum Geometricorum **14** (2014), 295–348.
- [25] C. Perwass: *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Heidelberg, 2008.
- [26] M. Rahayem, N. Werghe, J. Kjellander: *Best ellipse and cylinder parameters estimation from laser profile scan sections*, Optics and Lasers in Engineering **50.9** (2012), 1242–1259.
- [27] J. Richter-Gebert: *Perspectives on Projective Geometry: A guided tour through real and complex geometry*, Heidelberg, 2011.
- [28] J. Semple, G. Kneebone: *Algebraic Projective Geometry*, Oxford, 1952.
- [29] A. Thomas: *Geometric Characterizations of the Cross Ratio in a Pencil of Conics* (preprint) (2020).

Pavel Loučka, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: Pavel.Loucka@vutbr.cz

