VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ SÚŤAŽE MATHING

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

ABSTRAKT. Článok obsahuje dva vybrané príklady z internetovej matematickej súťaže MATHING. V prvom príklade sa dokazuje implikácia, ktorá obsahuje nerovnice, a sú tu diskutované často sa vyskytujúce chybné postupy pri riešení tohto typu úloh. Druhý príklad je takisto dôkazový, na tému sudoku, a okrem diskusie k jeho riešeniu je tu zmienená aj motivácia k jeho zaradeniu do súťaže. V tomto prípade sa riešenie dalo nájsť aj na internete, čo je v súlade s pravidlami súťaže.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje matematickú súťaž MATHING pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku, s pôvodným názvom Internetová matematická olympiáda. V novembri v roku 2023 prebehol už jej šestnásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach `mathing.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je šiesty v poradí na túto tému. Pozrieme sa v ňom bližšie na dva príklady, ktoré boli v súťaži v minulosti zaradené.

1. Príklad Nerovnosti

V roku 2022 bol príklad číslo 4 venovaný nerovnostiam. Uvádzam tu jeho zadanie.

Príklad 1. *Dokažte, že pokud reálná čísla a, b splňují nerovnosti*

$$|a+b| < ab + 1 < 2, \tag{1}$$

potom

$$|a| < 1,\ \ |b| < 1. \tag{2}$$

Príklad skúste vyriešiť sami. Dve možné riešenia príkladu nájdete aj na stránkach súťaže.

Mojim cieľom teraz nie je prediskutovať ďalšie možné správne riešenia tohto príkladu, ale ukázať, čo všetko sa pri riešení dalo pokaziť. Teda na čo všetko si treba dať pozor, keď dokazujeme takéto tvrdenie. Uvediem niekoľko možných nesprávnych postupov. Všetky tieto chybné postupy sa v riešeniach doručených od našich súťažiacich skutočne vyskytovali, prvé tri opakovane, štvrtý je perlička na pobavenie.

Pre zaujímavosť: Dokazované tvrdenie je v skutočnosti trochu inak zapísaná podmienka stability diferenčných rovníc druhého rádu.

Ak čísla a, b sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, potom koeficienty tejto rovnice α, β sú dané vzťahom $\alpha = -(a + b), \beta = ab$.

Tvrdenie z príkladu 1 teda hovorí, že ak sú korene rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ reálne čísla a $|\alpha| < \beta + 1 < 2$, potom sú oba korene rovnice v absolútnej hodnote menšie ako jedna, čo znamená stabilitu.

Takže nemusíme túto rovnicu riešiť, stačí overiť, či platí $|\alpha| < \beta + 1 < 2$.

1.1. Prvý chybný postup

Skúšam nájsť také dve reálne čísla a, b, že platí (1), t.j. $|a + b| < ab + 1 < 2$.

Napríklad to platí pre $a = 0$ a $b = 0{,}5$: $|0 + 0{,}5| < 0 \cdot 0{,}5 + 1 < 2$.
Alebo aj pre $a = 0{,}5$ a $b = 0{,}5$: $|0{,}5 + 0{,}5| < 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 1 < 2$.
Alebo aj pre $a = 0{,}9$ a $b = 0{,}7$: $|0{,}9 + 0{,}7| < 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 1 < 2$.
Ale ak skúsim vziať $a = 1, 2, 3 \dots$, nedarí sa mi nájsť také b, aby to platilo.

Takže vo všetkých prípadoch, ktoré som našla, platí $|a| < 1, |b| < 1$. Záver teda je, že tvrdenie platí.

Kde je chyba: Overila som to len pre vybrané dvojice. Nemám istotu, že pre nejakú inú dvojicu a, b, ktorú som vôbec neskúšala, sa stane, že bude platiť (1), ale budú to pritom také veľké čísla, že nebude platiť $|a| < 1, |b| < 1$. Čo keby to pre nejakú kombináciu veľkých (kladných alebo záporných) čísel predsa len platilo?

Ako som uviedla vyššie, je to akýsi test stability. Čo ak by sa tým testovala stabilita nejakého životne dôležitého systému? A ja by som si povedala: nepodarilo sa mi nájsť takú rovnicu, ktorá splňuje podmienky a pritom je systém nestabilný, budem teda veriť tomu, že tie podmienky mi zaručia stabilitu. Riskli by ste to?

⋄ Toto bol nesprávny postup typu: „Skúšam rôzne možnosti a pre všetky z nich to platí, takže to platí vždy."

1.2. Druhý chybný postup

Všimnem si, že podmienka (2) vyzerá jednoduchšie než podmienka (1), začnem teda s ňou: Vezmem také a, b, že platí $|a| < 1, |b| < 1$. Potom aj $|ab| < 1$, a z toho aj $ab < 1$. To už je vlastne druhá z nerovností (1), lebo potom $ab + 1 < 2$.

Zostáva ešte tá prvá nerovnosť, $|a + b| < ab + 1$. Umocním ju a upravím:

$$
\begin{aligned}
(|a + b|)^2 &< (ab + 1)^2, \\
a^2 + 2ab + b^2 &< a^2b^2 + 2ab + 1, \qquad / - 2ab - a^2b^2 - b^2 \\
a^2 - a^2b^2 &< 1 - b^2, \\
a^2(1 - b^2) &< 1 - b^2, \\
0 &< (1 - a^2)(1 - b^2).
\end{aligned}
$$

Pretože viem, že $|a| < 1, |b| < 1$, potom určite aj $a^2 < 1, b^2 < 1$ a súčin vpravo je kladný. Nerovnosť $0 < (1-a^2)(1-b^2)$ teda platí a platí aj pôvodná nerovnosť, lebo úpravy boli ekvivalentné a pôvodná nerovnica pred umocnením mala obe strany kladné.

Platia teda obe nerovnosti z podmienky (1) a tvrdenie je dokázané.

Kde je chyba: Naše dokazované tvrdenie je implikácia. Hovorí:

Ak pre reálne čísla a, b platí (1), *potom platí aj* (2).

Ale ja som namiesto toho dokázala, že

Ak pre reálne čísla a, b platí (2), *potom platí aj* (1).

A to nie je to isté. Neoverovala som také reálne čísla a, b, pre ktoré neplatí (2). O takých som v mojom dôkaze vôbec neuvažovala. Nezistila som, či by aj pre také čísla mohli platiť nerovnosti (1). Ak áno, tak to by znamenalo, že naše dokazované tvrdenie je nepravdivé.

Platnosť opačnej implikácie nehovorí nič o tom, či platí aj pôvodná implikácia!

⋄⋄ Toto bol nesprávny postup typu: „Dokazujem opačnú implikáciu".

Poznámka: V skutočnosti teda sú podmienky (1) a (2) ekvivalentné.

1.3. Tretí chybný postup

Výpočty v predchádzajúcom príklade nie sú úplne nanič, mohli by sa použiť aj pri dokazovaní tej správnej implikácie. Napríklad, začnem s prvou nerovnicou z (1). Predpokladám, že platí a umocním ju na druhú:

$$\begin{aligned} (|a+b|)^2 &< (ab+1)^2, \\ a^2+2ab+b^2 &< a^2b^2+2ab+1, \qquad / -2ab-a^2b^2-b^2 \\ a^2-a^2b^2 &< 1-b^2, \\ a^2(1-b^2) &< 1-b^2. \end{aligned}$$

Teraz celú nerovnicu vydelím výrazom $(1-b^2)$ a dostanem $a^2 < 1$, z toho $|a| < 1$. Alebo, ak prehodím a, b, z toho istého dostanem

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &< a^2b^2+2ab+1, \qquad / -2ab-a^2b^2-a^2 \\ -a^2b^2+b^2 &< 1-a^2, \\ b^2(1-a^2) &< 1-a^2. \end{aligned}$$

Túto nerovnicu vydelím výrazom $(1-a^2)$ a dostanem $b^2 < 1$, z toho $|b| < 1$. Dôkaz je hotový.

Kde je chyba: Mohlo by mi byť podozrivé, že som v dôkaze vôbec nevyužila druhú nerovnosť z predpokladu, to je, že $ab+1 < 2$. Ale nie je to ešte samo o sebe chyba, občas sa stane, že nejaká časť predpokladu je zbytočná.

K chybe došlo pri delení nerovnice výrazom $(1-b^2)$ a potom podobne výrazom $(1-a^2)$. O týchto výrazoch neviem, či sú kladné, záporné, alebo dokonca by mohli byť aj nulové. Nemôžem nimi teda len tak deliť. Musím to rozdeliť na tieto tri prípady a každý vyšetriť zvlášť. Pri delení záporným výrazom sa zmení znamienko nerovnice!

Na dokončenie dôkazu je potrebná tá zatiaľ nevyužitá nerovnica $ab + 1 < 2$. Už to tu nebudem dokončovať, podobný postup je použitý v riešení uvedenom na stránkach súťaže.

⋄⋄⋄ Toto bol nesprávny postup typu: „Nedávam si pozor pri úpravách nerovníc.“

1.4. Štvrtý chybný postup

Na záver jedna perlička: v jednom riešení autorom z nejakého dôvodu vadilo, že čísla a, b majú byť z otvoreného intervalu $(-1, 1)$, oni tam chceli mať uzavretý interval. Vyriešili to veľmi originálne. Našli číslo $c < 1$, ktoré je „tesne vedľa“ čísla 1 a otvorený interval $(-1, 1)$ mohli potom zapísať ako uzavretý interval $\langle -c, c\rangle$.

Boli si pritom vedomí toho, že toto číslo c nemôže byť $0{,}\overline{9}$, aj keď to tak na prvý pohľad vyzerá, pretože v skutočnosti $0{,}\overline{9} = 1$. Dokonca k tomu napísali aj správny výpočet pomocou vzorca pre súčet geometrického radu:

$$0{,}\overline{9} = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = 0{,}9\left(1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \cdots\right) = 0{,}9\frac{1}{1 - 0{,}1} = 1.$$

Ale nevzdali to. Tesne vedľa čísla, ktoré má za desatinnou čiarkou nekonečne veľa deviatok, logicky bude číslo, ktoré tam má samé deviatky a nejakú osmičku. To je (podľa nich) číslo $0{,}9\overline{89}$.

Keby sa zamysleli, asi by ich napadlo, že napríklad číslo $0{,}9\overline{98}$ je určite väčšie. Otázka je, či neexistuje ešte väčšie číslo. Podozrivé je napríklad $0{,}\overline{998}$. Alebo, možno by sa mohla tá osmička dať ešte ďalej od desatinnej čiarky...

Nechávam to čitateľom na premyslenie. Ak by sa vám podarilo toto číslo nájsť a dokázať, že medzi ním a jednotkou už žiadne iné reálne číslo nie je, bol by to prevratný objav.

2. Príklad Sudoku

Občas riešim sudoku. Je to celkom dobré cvičenie na logiku, postreh a na sústredenie. S logikou problém nemám, ale vedieť dobre riešiť sudoku znamená aj mať schopnosť rýchle a neomylne nájsť v tabuľke to voľné políčko, ktoré sa práve dá logicky doplniť. Často je tam také jediné. Mne to obvykle trvá dlho, než si také miesto všimnem, a občas niečo prehliadnem a doplním nesprávne číslo. Uvedomujem si, ako to robím nedokonale, a že lepšie by si s tým poradil počítačový algoritmus... Vždy ale pri týchto úvahách nakoniec dôjdem k záveru, že použiť na to počítač by nebolo ono, a radšej sa s tým trápim sama.

Raz ma pri riešení sudoku napadlo, že by na túto tému mohol byť aj príklad v našej súťaži. A aby to nebolo až také zložité, namiesto klasického sudoku 9×9 by sa použila jeho zmenšená verzia, 4×4, nazývaná shidoku.

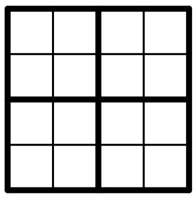
Úlohou by bolo ukázať, že najmenší možný počet dopredu vyplnených políčok, aby toto sudoku malo jednoznačné riešenie, je 4.

Toto tvrdenie je známe, a pretože naša súťaž dovoľuje používať všetky možné zdroje, dalo sa predpokladať, že niektorí súťažiaci si ten dôkaz skúsia dohľadať.

Skúsila som to aj ja. Prekvapilo ma, že sa mi to vôbec nedarilo. O sudoku sa toho samozrejme na internete dá nájsť veľa, dá sa ľahko zistiť aj potrebný minimálny počet zadaných čísiel pre klasické sudoku, je to 17. Ako to ale býva, väčšina textov uvádza len tvrdenia bez dôkazu, často dokonca aj bez odkazu na zdroj. Ukážkou takéhoto textu je napríklad príspevok „Matematika za sudoku“, [1]. A pretože takéto „jednoduchšie“ texty sú populárnejšie, vyhľadávač ich uprednostní pred tými „serióznejšími“. Takže skutočnosť, že o sudoku sa na internete píše veľa, nám vyhľadávanie nášho dôkazu paradoxne skôr skomplikuje.

Zhodnotila som, že nájdenie toho dôkazu je tak náročné, že môžeme príklad bez obáv zaradiť. Stalo sa tak v roku 2021 a v súťaži mal číslo 8. Príklad bol rozdelený na dve časti, aby sme trochu pomohli slabším riešiteľom. Od tých sa očakávalo, že zvládnu len prvú časť.

Príklad 2. *Máme sudoku* 4×4*, do kterého doplňujeme čísla od* 1 *do* 4 *tak, že v každém řádku jsou 4 různá čísla, v každém sloupci jsou 4 různá čísla, a v každém ze čtyř tlustě vyznačených čtverců* 2×2 *jsou 4 různá čísla, viz obrázek 1.*



Obrázek 1. Obrázek k zadání příkladu 2..

Je známo, že k tomu, aby mohlo mít toto sudoku jediné řešení, je potřeba mít zadaná 4 čísla.

a) Nalezněte takové zadání sudoku 4×4*, že budou dopředu vyplněna právě 4 čísla a poloha zbývajících čísel už pak bude určena jednoznačně. Naznačte i postup řešení takto vámi zadaného sudoku.*

b) Dokažte, že neexistuje takové zadání sudoku 4×4*, kde budou dopředu vyplněna jenom 3 čísla a poloha ostatních už bude určena jednoznačně.*

Poznámka: O sudoku je spousta informací na internetu a v literatuře. Pokud váš důkaz obsahuje něco, co jste sami nevymysleli, jenom převzali, je v něm potřeba uvést i odkaz na zdroj s důkazem vámi použitého tvrzení.

Tento príklad bol teda výnimočný tým, že riešitelia mali na výber dva možné prístupy - buď dôkaz vymyslia sami, alebo sa ho pokúsia niekde dohľadať. To bolo dovolené, ale v takom prípade by museli buď celý dôkaz prepísať do svojho riešenia, alebo uviesť odkaz na zdroj – článok – v ktorom je tento dôkaz uvedený.

Dopadlo to tak, že len asi tri tímy uviedli odkazy na články, kde toto tvrdenie bolo uvedené, a ani jeden z odkazovaných článkov neobsahoval jeho dôkaz.

Tí riešitelia, ktorí poslali nejaký vlastný dôkaz, postupovali tak, že systematicky prechádzali možné rozmiestnenia troch dopredu vyplnených čísiel a pre každú možnosť ukázali, že nedáva jednoznačné riešenie. Tých možností je však toľko, že skoro všetci nejaké vynechali a ich dôkazy neboli úplné.

Moje nádeje, že behom dvoch hodín, ktoré mali riešitelia k dispozícii, niekto objaví elegantný dôkaz, či už vlastný, alebo prevzatý z internetu, sa teda nesplnili.

Naopak, bolo sklamaním, koľkí z nich za dôkaz považovali to, že uviedli len jedno konkrétne zadanie s dopredu vyplnenými tromi číslami a ukázali, že nemá jednoznačné riešenie.

Ďalej, niektorí sa pokúsili o rôzne pomocné tvrdenia, konkrétne sa vyskytli tieto tri:

Tvrdenie 1. *Aby existovalo jednoznačné riešenie, musia byť vyplnené tri rôzne čísla.*

Tvrdenie 2. *Aby existovalo jednoznačné riešenie, musí byť v každom štvorci vyplnené aspoň jedno číslo.*

Tvrdenie 3. *Aby existovalo jednoznačné riešenie, v každom riadku alebo v každom stĺpci musí byť vyplnené aspoň jedno číslo.*

Tvrdenie 1 je pravdivé, a dá sa ľahko dokázať napríklad úvahou: Ak by neboli vyplnené tri rôzne čísla, aspoň dve sa v zadaní vôbec neobjavia. Určite teda ku každému riešeniu existuje aj druhé riešenie také, kde sú tieto dve čísla vymenené.

Tvrdenie 2 a Tvrdenie 3 by nám síce hneď implikovalo hľadaný dôkaz, obe tieto tvrdenia sú však nepravdivé a dajú sa vyvrátiť protipríkladom. Nájdenie týchto protipríkladov nie je zložité a nechávam ho čitateľom na pobavenie.

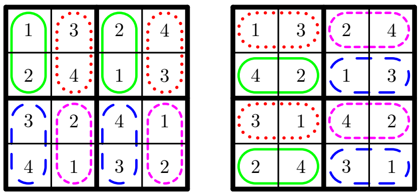
Pri príprave tohto článku som konečne natrafila aj na text, uvádzajúci dôkaz neexistencie jednoznačného zadania len s tromi číslami pre sudoku 4×4, [2]. Autorom je indický fyzik Sourendu Gupta. Má tam nejakú teóriu, ale aj on nakoniec v dôkaze postupne overuje rôzne možnosti.

Na záver uvádzam svoj dôkaz, uvedený na stránkach našej súťaže ako časť riešenia príkladu 8 (14. ročník). Obvykle do týchto článkov nekopírujem autorské riešenia príkladov, pretože sa dajú jednoducho dohľadať na stránkach súťaže, ale v tomto prípade urobím výnimku, vzhľadom na to, že je to jediný mne známy dôkaz tohto tvrdenia nevyužívajúci postupné prechádzanie možností ani žiadnu teóriu.

Riešenie príkladu 2 b): (Prevzaté z `https://mathing.fme.vutbr.cz`)

Důkaz. Ukážeme, že políčka v každém vyplněném sudoku lze rozdělit do 4 skupin tak, že v každé skupině se mohou čísla navzájem prohodit. Pokud jsou dopředu vyplněna pouze 3 čísla, pak v alespoň jedné ze skupin není vyplněno nic a úloha má tak více řešení.

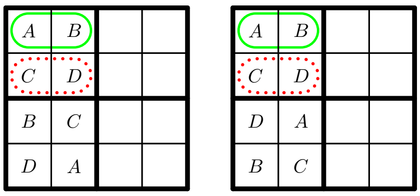
Příklady takového dělení u dvou různě vyplněných sudoku jsou na obrázku 2. (Pozn.: pro případ černobílého zobrazení jsou skupiny vyznačeny i různým typem



Obrázek 2. Obrázek k řešení příkladu 2..

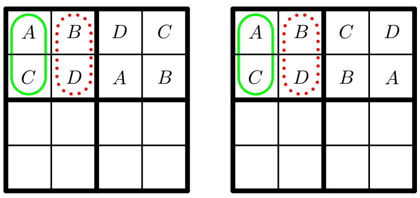
čáry. Zelená skupina je vyznačena plnou čárou a červená skupina je vyznačena tečkovanou čárou)

V obou případech stačí, aby existovalo rozdělení na červenou a zelenou skupinu, a pak už lze i zbývajících 8 políček určitě rozdělit na dvě další skupiny vyznačeným způsobem. Předpokládejme, že existuje vyplněné sudoku, které nelze rozdělit tímto způsobem. Označme čísla v levém horním čtverci v prvním řádku A a B a ve druhém řádku C a D. Pak z předpokladu plyne, že v levém dolním čtverci jsou čísla A a B v různých řádcích a stejně tak jsou v různých řádcích i čísla C a D. Dostáváme tedy pouze dvě možnosti jejich umístění, viz obrázek 3.



Obrázek 3. Obrázek k řešení příkladu 2..

Podobně z předpokladu dostaneme, že v pravém horním čtverci jsou čísla A a C v různých sloupcích a stejně tak i čísla B a D. Dostáváme tedy opět pouze dvě možnosti jejich umístění, viz obrázek 4.



Obrázek 4. Obrázek k řešení příkladu 2..

Vidíme, že v levém dolním čtverci je určitě řádek obsahující dvojici čísel B a C a v pravém horním čtverci je určitě sloupec obsahující dvojici čísel A a D. Políčko v tomto řádku a v tomto sloupci v pravém dolním čtverci už tedy nemůže obsahovat žádné z čísel A, B, C, D. To je ve sporu s předpokladem, že je sudoku vyplněno. □

Na záver niečo na zamyslenie: Nedal by sa podobne urobiť aj dôkaz toho, že potrebný minimálny počet zadaných čísiel pre klasické sudoku je 17? Ten, ktorý je verejne známy, publikovaný v článku [3], totiž tiež využíva prechádzanie možností a dá sa realizovať jedine na počítači.

Reference

[1] *Matematika za sudoku*, https://sciencemag.cz/matematika-za-sudoku/

[2] Sourendu Gupta. *Some results on Su Doku*, 2006, https://theory.tifr.res.in/~sgupta/sudoku/theorems.pdf

[3] Gary McGuire and Bastian Tugemann and Gilles Civario. *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*, 2013, https://doi.org/10.48550/arXiv.1201.0749

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz