

ANALÝZA PROBLÉMU CYKlickÉHO PRONÁSLEDOVÁNÍ

VENDULA KUČEROVÁ

ABSTRAKT. Tento článek se zabývá analýzou problému cyklického pronásledování, který se objevuje v různých oblastech aplikované matematiky. Cílem je sestavit matematický model pohybu n bodů (jedinců), kde každý sleduje svého souseda podle předem stanovených pravidel. Pohyb těchto bodů je popsán soustavou diferenciálních rovnic, na jejímž základě je analyzována trajektorie pohybu a stanovena doba pronásledování. Teoretické výsledky jsou podpořeny grafickou vizualizací pro různé modifikace. Článek obsahově vychází z autorčiny bakalářské práce [4].

1. ÚVOD

V roce 1732 francouzský matematik Pierre Bouguer publikoval a následně i vyřešil problém, který je dnes považován za první v oblasti pronásledovacích úloh. V této klasické úloze míří pronásledovatel v každém okamžiku přímo na svůj cíl, čímž vytváří tzv. *pronásledovací křivku* (pursuit curve).

V roce 1877 Edouard Lucas koncept zobecnil na tzv. *cyklické pronásledování*. V jeho slavném zadání, známém jako „problém tří psů“, jsou psi umístěni do vrcholů rovnostranného trojúhelníka a každý z nich začne současně pronásledovat svého souseda stejnou konstantní rychlostí. Henri Brocard krátce nato ukázal, že výslednou trajektorii každého psa je logaritmická spirála. V literatuře se problém cyklického pronásledování často ilustruje na tzv. problému čtyř brouků, který se stal jedním z nejznámějších modelových příkladů této úlohy [6].

V tomto článku se postupně zaměříme na sestavení matematického modelu pro n bodů. Začneme již zmiňovaným případem čtyř brouků ve vrcholech čtverce, přejdeme k zobecnění pro pravidelné n -úhelníky a v závěru prodiskutujeme i chování systému v nesymetrických případech.

2. PROBLÉM ČTYŘ BROUKŮ

Nejnázornějším případem pro pochopení problému je situace, kdy čtyři brouci startují z vrcholů čtverce. Tento model nejlépe demonstrovuje základní dynamiku celého systému.

2020 MSC. Primární 9N75; Sekundární 91A24,34A05.

Klíčová slova. Cyklické pronásledování, problém n brouků, pronásledovací křivka, diferenciální rovnice, matematický model.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucí práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

2.1. Zadání

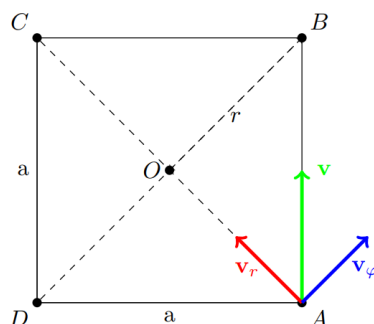
Brouci jsou na začátku umístěni do vrcholů čtverce. V čase $t = 0$ začne každý brouk pronásledovat svého souseda proti směru hodinových ručiček. Všichni se pohybují stejnou (konstantní) rychlostí a v každém okamžiku míří přímo na svého souseda [3].

Problém A: Jakou křivku opíše každý brouk?

Problém B: Jak dlouhá bude dráha, kterou každý brouk urazí, než se potkají? Za jak dlouho dojde k setkání?

2.2. Matematický model

Brouci A, B, C, D tvoří vrcholy čtverce o straně a . Počátek polární soustavy kládeme do středu čtverce O . V libovolném čase t se brouk A nachází ve vzdálenosti $r(t)$ od středu. Díky symetrii se všichni brouci pohybují po stejných trajektoriích, pouze vzájemně otočených o $\pi/2$.



Obrázek 1. Geometrie brouků ve čtverci.

Vektor rychlosti v brouka A směřuje v každém okamžiku do bodu B . Tento vektor rozložíme v polárních souřadnicích na složku radiální v_r a tangenciální v_φ .

Pro úplnost uvedme, jakým způsobem je vektor rychlosti rozložen v polárních souřadnicích. Poloha bodu je popsána v komplexní rovině ve tvaru

$$\mathbf{p}(t) = r(t) e^{i\varphi(t)},$$

odkud pro rychlostní vektor plyne

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \frac{dr}{dt} e^{i\varphi(t)} + i r(t) e^{i\varphi(t)} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Vektor $e^{i\varphi}$ představuje jednotkový radiální vektor ve směru průvodiče, zatímco $ie^{i\varphi}$ je jednotkový tečný vektor kolmý na radiální směr. Odtud dostaneme standardní

tvar radiální a tangenciální složky rychlosti

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Z geometrie čtverce plyne, že vektor rychlosti svírá s průvodičem konstantní úhel $\pi/4$ a na základě toho můžeme jednotlivé složky zapsat takto:

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -v \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = v \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

2.3. Řešení

2.3.1. Problém A: Určení trajektorie. Abychom získali přímo závislost $r(\varphi)$, využijeme řetězové pravidlo

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt},$$

do něhož dosadíme složky rychlosti (1) a (2). Odtud plyne

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r}.$$

Separací proměnných a využitím počáteční podmínky $r(0) = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ získáváme řešení

$$r(\varphi) = a\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\varphi}. \quad (3)$$

Každý brouk opisuje *logaritmickou spirálu*, která začíná ve vrcholu čtverce ($\varphi = 0$) a při rostoucím φ konverguje ke středu O , viz. obrázek 2.

2.3.2. Problém B: Délka dráhy a doba pronásledování. Délka oblouku v polárních souřadnicích je dána vztahem [5]

$$S = \int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi.$$

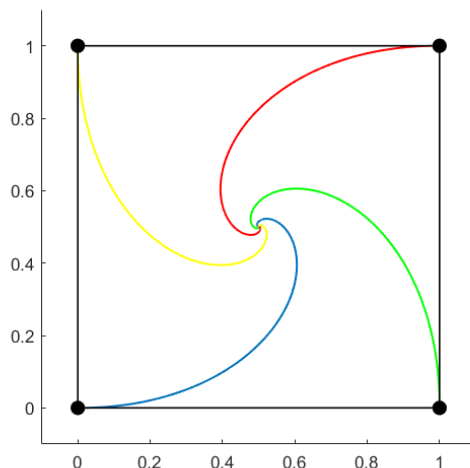
Poznamenejme, že meze integrálu jsou dány jako $\varphi \in [0, \infty)$. Pronásledovací křivky brouků jsou logaritmické spirály, které nemají v rovině konečný průsečík, ale při $\varphi \rightarrow \infty$ konvergují k počátku souřadného systému. K setkání brouků proto dochází až v limitním bodě $r \rightarrow 0$, což odpovídá právě limitě $\varphi \rightarrow \infty$. Horní mez integrálu je tedy rovna nekonečnu.

Po dosazení (3) do tohoto vztahu dostaneme

$$S = \int_0^\infty a e^{-\varphi} d\varphi.$$

Nevlastní integrál vyčíslíme jako limitu:

$$S = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_0^\tau a e^{-\varphi} d\varphi \right) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [-a e^{-\varphi}]_0^\tau.$$



Obrázek 2. Pronásledovací křivky pro $a = 1$.

Protože $e^{-\tau} \rightarrow 0$ pro $\tau \rightarrow \infty$, platí

$$S = a.$$

Každý brouk tedy urazí dráhu rovnou straně čtverce.

Zbývá stanovit čas, za který k pronásledování dojde. Vzhledem k tomu, že se brouci pohybují stejnou rychlostí v , lze jej vyjádřit jako podíl délky dráhy a rychlosti

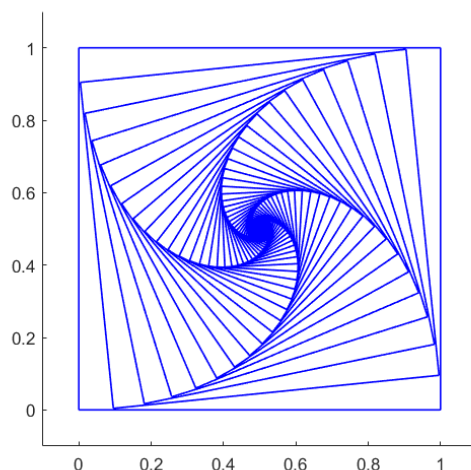
$$T = \frac{S}{v} = \frac{a}{v}.$$

2.4. Symetrie čtverce

V závěru předchozí kapitoly jsme ukázali, že v případě čtyř brouků ve vrcholech čtverce je celková uražená dráha rovna počáteční délce jeho strany, tedy $S = a$. Na tuto skutečnost lze nahlédnout i z jiné strany a to bez použití diferenciálních rovnic.

Díky symetrii zůstávají brouci po celou dobu pronásledování ve vrcholech smřtujícího se a současně rotujícího čtverce. Každý brouk se tedy pohybuje po tečně ke kružnici opsané tomuto čtverci a urazí dráhu odpovídající počáteční délce jeho strany.

Tuto myšlenku ilustruje obrázek 3, kde jsou v diskrétních časových okamžicích zobrazeny po sobě jdoucí konfigurace čtverce. Je však třeba zdůraznit, že tento argument je založen výhradně na symetrii čtverce. Úhel mezi sousedními trajektoriemi je zde v každém okamžiku roven $\pi/2$, a proto se strany čtverce zkracují stejnou rychlostí, jakou se brouci pohybují. V obecném případě tato vlastnost neplatí.



Obrázek 3. Smršťující se čtverce při cyklickém pronásledování.

3. ZOBECNĚNÝ PROBLÉM n BROUKŮ V PRAVIDELNÉM n -ÚHELNÍKU

V následující části rozšíříme předchozí analýzu na obecný případ n brouků ve vrcholech pravidelného n -úhelníku.

3.1. Zadání

Uvažujme n brouků umístěných ve vrcholech pravidelného n -úhelníku. V čase $t = 0$ začne každý brouk pronásledovat svého souseda proti směru hodinových ručiček. Všichni brouci se pohybují stejnou rychlostí a v každém okamžiku směřují přímo na pronásledovaného brouka [6].

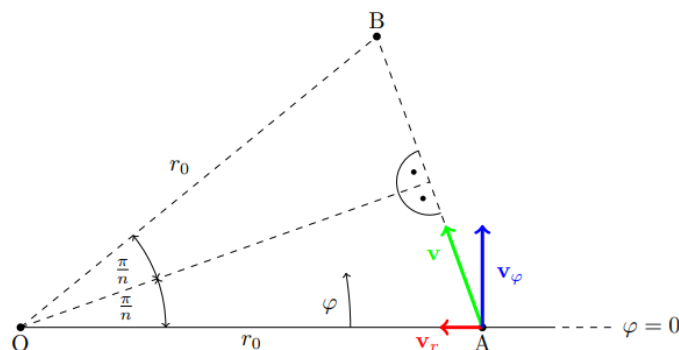
Problém C: Jakou křivku opíše každý brouk?

Problém D: Jaká je délka dráhy uražené každým broukem do okamžiku setkání a za jak dlouho k setkání dojde?

3.2. Matematický model

Obrázek 4 zobrazuje konfiguraci pro libovolné dva sousední brouky A a B umístěné v pravidelném n -úhelníku. Zvolíme polární souřadnicový systém s počátkem ve středu O a úhlem $\varphi = 0$ totožným s vodorovnou osou. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že brouk A se v čase $t = 0$ nachází na této ose.

Brouk A se pohybuje přímo směrem k brouku B rychlostí v . Vektor rychlosti v rozložíme v polárních souřadnicích na radiální a tangenciální složku. Z elementární geometrie vyplývá, že tyto složky mají tvar



Obrázek 4. Geometrie pronásledování v pravidelném n -úhelníku.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v \sin \frac{\pi}{n}, \quad (4)$$

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = v \cos \frac{\pi}{n}. \quad (5)$$

3.3. Řešení

3.3.1. Problém C: Tvar trajektorie. Dosazením složek (4) a (5) vektoru rychlosti do řetězového pravidla získáme diferenciální rovnici

$$\frac{dr}{r} = -\tan \frac{\pi}{n} d\varphi.$$

Jejím řešením separací proměnných s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$ dostaneme

$$r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi \tan \frac{\pi}{n}}, \quad (6)$$

což je rovnice logaritmické spirály. Všechny trajektorie jsou shodné až na rotaci o úhel $\frac{2\pi}{n}$. Pro $n = 4$ se výraz redukuje na případ čtverce.

3.3.2. Problém D: Délka dráhy a doba do setkání. Pro výpočet dráhy, kterou brouci urazí, využijeme stejného postupu jako v předešlém případě. Platí tedy

$$S = \int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi$$

Po dosazení získané trajektorie (6) a vyčíslením integrálu obdržíme

$$S = \frac{r_0}{\sin \frac{\pi}{n}}. \quad (7)$$

Doba do setkání plyne přímo ze vztahu mezi dráhou a rychlostí,

$$T = \frac{S}{v} = \frac{r_0}{v \sin \frac{\pi}{n}}.$$

3.4. Dráhy pro některá n

Z geometrie pravidelného n -úhelníku plyne, že počáteční vzdálenost mezi dvěma sousedními brouky je

$$a(0) = 2r_0 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Odtud vyjádříme r_0 :

$$r_0 = \frac{a(0)}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Dosazením tohoto vztahu do vzorce (7) pro dráhu dostáváme výsledný výraz

$$S = \frac{a(0)}{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

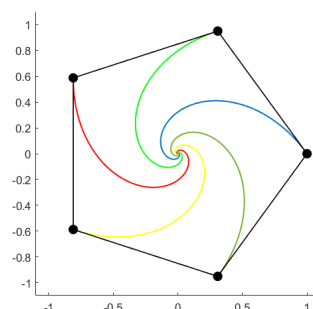
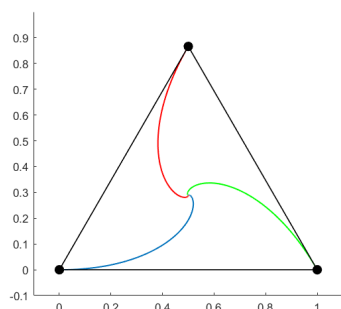
Tento vztah umožňuje přímo porovnat délku dráhy ураženou brouky pro různé hodnoty n v jednotkách počáteční vzdálenosti $a(0)$.

Tabulka 1. Délka dráhy S pro vybraná n (v jednotkách $a(0)$).

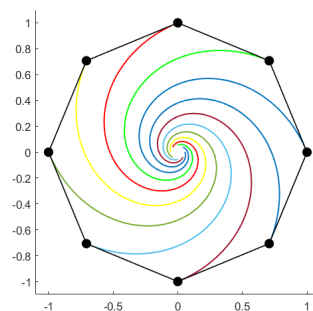
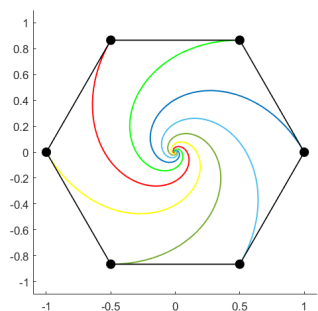
n	$S [a(0)]$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{3}$
4	1
5	1,44721
6	2
7	2,65597
8	3,41421
9	4,27432
10	5,23607
100	506,77262
1000	50660,75849

Z tabulky je patrné, že s rostoucím n roste i délka dráhy. V limitě $n \rightarrow \infty$ se n -úhelníky blíží příslušným kružnicím a brouci se nikdy nepotkají, což odpovídá intuitivnímu chování cyklického pronásledování na kruhu.

3.5. Grafické vizualizace



Obrázek 5. Pronásledovací křivka pro $n = 3$. **Obrázek 6.** Pronásledovací křivka pro $n = 5$.



Obrázek 7. Pronásledovací křivka pro $n = 6$. **Obrázek 8.** Pronásledovací křivka pro $n = 8$.

4. MORLEYHO NESYMETRICKÝ PROBLÉM TŘÍ BROUKŮ

Tento problém redukuje konfiguraci na tři brouky, ale bez počáteční symetrie — výchozí trojúhelník je obecný, nikoli pravidelný. Klíčovou otázkou je možnost ne-současného setkání. Ukážeme, že brouci se musí setkat **současně** a že k setkání dojde v **konečném čase** (postup i důkazy vycházejí z [3, 6]).

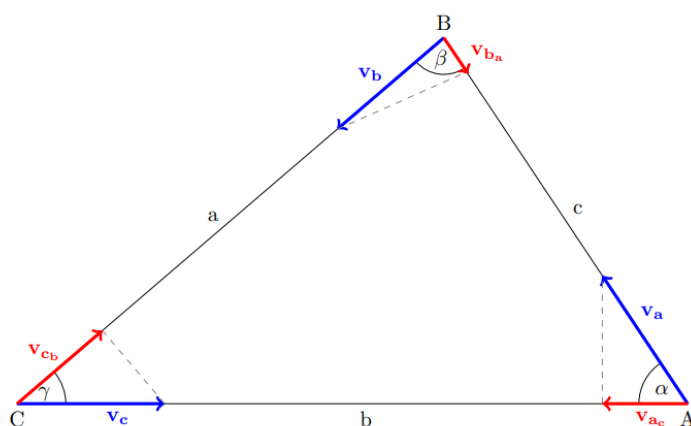
4.1. Zadání

Mějme nepravidelný trojúhelník s vrcholy A, B a C . Do těchto vrcholů umístíme brouky, které označíme souhlasně s vrcholy písmeny A, B a C . Strany trojúhelníku označíme podle jejich protějšího vrcholu. Úhly u vrcholů označíme α, β, γ . Brouci se pohybují stejnou konstantní rychlostí v a každý brouk pronásleduje přímo svého souseda proti směru hodinových ručiček.

Problém E: Dokažte, že se všichni brouci setkají zároveň.

Problém F: Ukažte, že k setkání dojde za konečný čas.

4.2. Matematický model



Obrázek 9. Rychlosti brouků v nepravidelném trojúhelníku.

Zavedeme pojem **uzavírací rychlosti** – jde o rychlost, s níž se zkracuje délka strany vlivem vzájemného pronásledování. V případě čtverce byla uzavírací rychlost rovna rychlosti brouka, protože úhly mezi vektory rychlostí a spojnicemi sousedů byly vždy $\pi/2$.

V obecném (nesymetrickém) trojúhelníku je situace odlišná, protože vektor rychlosti pronásledovaného brouka není kolmý na spojnici s pronásledovatelem. Uvažujme stranu a , která spojuje brouky B a C . Brouk B se pohybuje přímo směrem k brouku C s rychlostí v_b , která přímo zkracuje stranu a . Brouk C směřuje k brouku A a jeho rychlost v_c má vůči straně a pouze složku v_{cb} , tj. projekci do směru strany a . Celková uzavírací rychlost strany a je součtem těchto dvou příspěvků:

$$v_{uz,a} = |v_b| + |v_{cb}|.$$

Protože se délka strany zmenšuje, derivace strany a podle času je rovna záporně vzaté uzavírací rychlosti. Předpokládáme-li pro zjednodušení jednotkovou rychlost pohybu ($v = 1$), získáváme analogickým postupem pro všechny strany následující soustavu diferenciálních rovnic:

$$\frac{da}{dt} = -(1 + \cos \gamma), \quad (8)$$

$$\frac{db}{dt} = -(1 + \cos \alpha), \quad (9)$$

$$\frac{dc}{dt} = -(1 + \cos \beta), \quad (10)$$

kde si uvědomujeme, že kromě velikostí stran a, b, c se časem mění také velikosti úhlů α, β, γ , které jsou funkcemi času.

4.3. Dynamika vnitřních úhlů

Abychom pochopili, jak se trojúhelník během pronásledování mění, musíme odvodit časovou závislost vnitřních úhlů. Východiskem je kosinová věta pro úhel α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

kterou zderivujeme podle času:

$$a \frac{da}{dt} = b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} - (b \frac{dc}{dt} + c \frac{db}{dt}) \cos \alpha + bc \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \quad (11)$$

Do tohoto vztahu dosadíme dříve odvozené rovnice pro změny délek stran (8), (9), (10). Pro následné zjednodušení výrazu využijeme specifickou trigonometrickou identitu

$$b(1 - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = c(\cos \alpha - \cos \beta) + a(1 + \cos \gamma).$$

Dosazením této identity do zderivované kosinové věty (11) dojde k eliminaci většiny členů, čímž se vztah redukuje na diferenciální rovnici pro derivaci úhlu α :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin \alpha}{b} - \frac{\sin \beta}{c}.$$

V zadání jsme si označení stran a úhlů zvolili libovolně, což umožňuje cyklickou transformaci. Soustavu pro změnu úhlu α lze tedy analogicky přepsat i pro úhly β a γ přejmenováním proměnných

$$\alpha \rightarrow \gamma, \quad a \rightarrow c \quad \gamma \rightarrow \beta, \quad c \rightarrow b \quad \beta \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow a.$$

Následující soustava popisuje časovou změnu všech úhlů trojúhelníku v závislosti na aktuálních délkách stran.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin \alpha}{b} - \frac{\sin \beta}{c}, \quad (12)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\sin \beta}{c} - \frac{\sin \gamma}{a}, \quad (13)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\sin \gamma}{a} - \frac{\sin \alpha}{b}.$$

V další části textu se zaměříme na Problém E a Problém F. Nejprve ukážeme, že brouci se v nesymetrickém trojúhelníku musí setkat současně, tj. že existuje čas t_c , při kterém všechny strany trojúhelníku konvergují k nule:

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^-} b(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^-} c(t) = 0.$$

Později v rámci Problému F prokážeme, že tento čas t_c je konečný.

4.4. Řešení Problému E – důkaz současného setkání

Ukážeme sporem, že v obecném trojúhelníku nemůže dojít k postupnému setkání brouků, nýbrž že všichni tři se musí setkat současně. Po celou dobu pohybu brouci tvoří trojúhelník, a proto pro všechna $t < t_c$ platí

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) = \pi, \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi. \quad (14)$$

Předpokládejme, že jako první se setkají brouci A a B , zatímco brouk C je dostihne až později, tj.

$$c \rightarrow 0 \wedge a, b \not\rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow t_c^-,$$

kde t_c je čas, kdy A dostihne B .

Protože funkce $a(t), b(t), c(t)$ jsou monotónně klesající a nezáporné, existují jejich konečné limity:

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} c(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_c^-} a(t) = a_0 > 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_c^-} b(t) = b_0 > 0.$$

V důsledku toho přímo vyplývá, že pro t dostatečně blízká t_c^- platí nerovnost

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{c} < 0.$$

Podle sinové věty platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{b}{c} < 0,$$

po úpravě

$$\frac{\sin \alpha}{b} < \frac{\sin \beta}{c}.$$

Odtud a ze vztahu (12) plyne $\frac{d\alpha}{dt} < 0$, tedy existuje α_0 tak, že

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} \alpha = \alpha_0 < \pi.$$

Zaměříme se nyní na chování úhlu β . Pro všechna $t \in (0, t_c)$ platí $a(t) > a_0$ a zároveň $\gamma(t) \in (0, \pi)$. Ze vztahu (13) proto dostáváme odhad

$$\frac{d\beta}{dt} > \frac{\sin \beta}{c} - \frac{1}{a_0}. \quad (15)$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{\sin \beta}{c} > 0$, lze tento odhad upravit

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{a_0} > 0.$$

Toto můžeme přepsat jako:

$$\frac{d}{dt} \left(\beta + \frac{t}{a_0} \right) > 0.$$

Z toho plyne, že výraz v závorce je rostoucí a je shora omezen, existence limity $\beta(t) \rightarrow \beta_0$ je tedy zajištěna.

Nyní zintegrováním nerovnosti (15) na intervalu $(0, t_c^-)$ dostáváme

$$\int_0^{t_c^-} d\beta > \int_0^{t_c^-} \frac{\sin \beta}{c} dt - \int_0^{t_c^-} \frac{1}{a_0} dt.$$

Po vyhodnocení integrálů a využití limitního chování $\beta(t) \rightarrow \beta_0$ při $t \rightarrow t_c^-$ získáme nerovnost

$$\beta_0 - \beta(0) + \frac{t_c^-}{a_0} > \int_0^{t_c^-} \frac{\sin \beta}{c} dt. \quad (16)$$

Integrand na pravé straně je na celém integračním intervalu kladný, neboť $\beta \in (0, \pi)$ a $c(t) > 0$. Levá strana tedy představuje konečnou horní mez, z čehož plyne existence daného integrálu.

Pomocí vztahu (10) provedeme substituci

$$dt = -\frac{dc}{1 + \cos \beta},$$

kteřá je přípustná díky monotónnímu poklesu funkce $c(t)$. Po úpravě mezí dostává pravá strana (16) tvar

$$\int_0^{c(0)} \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \frac{dc}{c}.$$

S využitím identity

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \tan \frac{\varphi}{2}$$

se integrál přepíše jako

$$\int_0^{c(0)} \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{c} dc.$$

Existence tohoto integrálu vyžaduje, aby při $c \rightarrow 0$ platilo $\tan \frac{\beta}{2} \rightarrow 0$, jinak by integrál divergoval. Tedy

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} \beta(t) = \beta_0 = 0.$$

Protože strana $c(t)$ se v jeden okamžik stane nejkratší stranou, sinová věta implikuje, že i protější úhel $\gamma(t)$ je nejmenší a současně $\gamma(t) \rightarrow 0$.

Shrneme-li limitní chování úhlů, dostáváme

$$\alpha(t) \rightarrow \alpha_0 < \pi, \quad \beta(t) \rightarrow 0, \quad \gamma(t) \rightarrow 0.$$

Odtud ale plyne

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} (\alpha + \beta + \gamma) < \pi,$$

což je v rozporu s podmínkou $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (14). Tento spor ukazuje, že předpoklad postupného setkání je chybný a všichni tři brouci se musí setkat **současně**.

4.5. Řešení Problému F – konečný čas setkání

V předchozí části jsme ukázali, že pokud k dostižení dojde, pak nutně proběhne současně. Zbývá tedy dokázat, že čas dostižení t_c je konečný.

Sečtením rovnic (8)–(10) dostáváme

$$\frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} = -3 - (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma). \quad (17)$$

Protože po celou dobu pohybu platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi),$$

lze výraz na pravé straně rovnice (17) shora i zdola omezit.

Uvažujeme funkci

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů lze ověřit, že extrémní hodnoty této funkce za vazební podmínky $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ nastávají buď v bodě

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3},$$

nebo na hranici přípustné oblasti v degenerovaném limitním případě, kdy dva úhly konvergují k nule a třetí k π . Těmto konfiguracím odpovídají hodnoty

$$f_{\max} = \frac{3}{2}, \quad f_{\min} = 1.$$

Odtud plyne odhad

$$1 \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Dosazením do (17) získáme nerovnost

$$-\frac{9}{2} \leq \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} \leq -4,$$

která platí po celý čas pohybu. Z toho vyplývá, že součet délek stran

$$S(t) = a(t) + b(t) + c(t)$$

je klesající funkce, omezená zdola nulou. Integrací této nerovnosti na intervalu $[0, t] \subset [0, t_c]$ dostáváme

$$-\frac{9}{2}t \leq S(t) - S(0) \leq -4t.$$

Protože $S(t) \geq 0$, existuje čas $t_c > 0$, pro který

$$S(t_c) = a(t_c) + b(t_c) + c(t_c) = 0.$$

Vzhledem k nezápornosti jednotlivých délek stran a zaručené současnosti dostižení je současně

$$a(t_c) = b(t_c) = c(t_c) = 0.$$

Dosazením $t = t_c$ do předchozí nerovnosti získáme odhad doby dostižení:

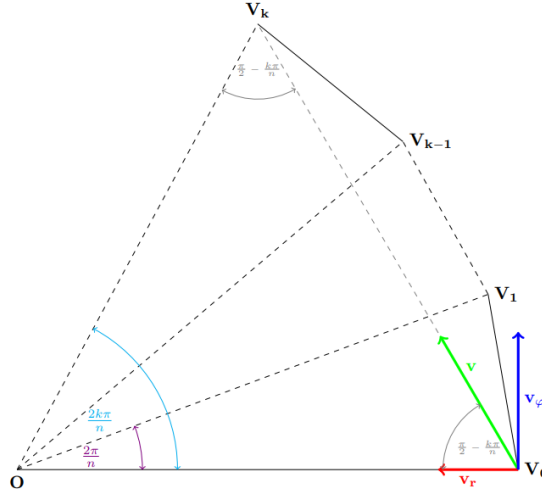
$$-\frac{9}{2} t_c \leq -S(0) \leq -4 t_c \quad \implies \quad \frac{S(0)}{9/2} \leq t_c \leq \frac{S(0)}{4},$$

kde $S(0) = a(0) + b(0) + c(0)$. Odtud přímo plyne, že t_c je konečný.

5. DALŠÍ MODIFIKACE ÚLOH

Cyklické pronásledování umožňuje řadu zobecnění. Častou variantou je, že každý brouk v pravidelném n -úhelníku nepronásleduje nejbližšího souseda, ale brouka vzdáleného o k vrcholů [7]. Pro $k = 1$ jde o klasický, symetrický případ.

Uvažujme pravidelný n -úhelník opsaný jednotkovou kružnicí ($r(0) = 1$) a polární souřadnicový systém se středem v O . Brouk z vrcholu V_0 pronásleduje brouka ve vrcholu V_k .



Obrázek 10. Pronásledování k -tého souseda.

Podle geometrie n -úhelníku vyjádříme jednotlivé složky vektoru rychlosti

$$v_r = -v \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n} \right),$$

$$v_\varphi = v \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n} \right).$$

Pomocí goniometrických identit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

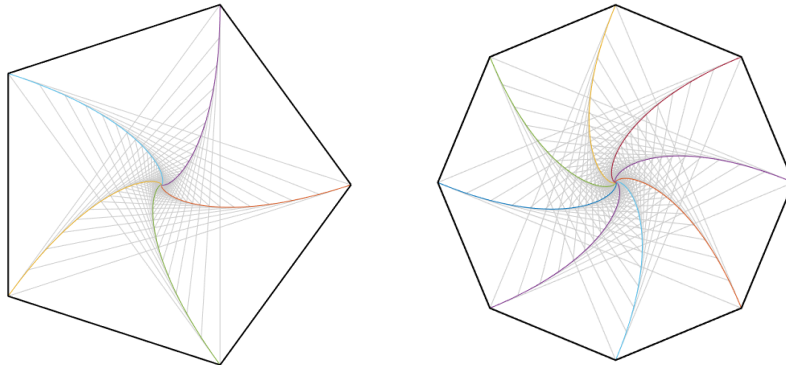
můžeme složky přepsat přímo v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v \sin \frac{k\pi}{n}, \\ r \frac{d\varphi}{dt} &= v \cos \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Tyto složky dosadíme do řetězového pravidla a vzniklou diferenciální rovnici vyřešíme metodou separace proměnných s počáteční podmínkou $r(0) = 1$. Výsledkem je

$$r(\varphi) = e^{-\varphi \tan \frac{k\pi}{n}}.$$

Vidíme, že trajektorie brouka tvoří logaritmickou spirálu směřující ke středu n -úhelníku O .



Obrázek 11. Pronásledovací křivky pro $k = 2$, $n = 5$ vlevo a $k = 3$, $n = 8$ vpravo.

Poznámka. Pokud by brouk měl pronásledovat brouka vzdáleného více než polovinu obvodu n -úhelníku ($k > \frac{n}{2}$), je vhodnější zvolit opačný směr pohybu $-\varphi$, aby trajektorie směřovala přímo ke sledovanému cíli.

6. DALŠÍ MODIFIKACE ÚLOH

Dalším zobecněním je pronásledování na zakřivených plochách, například na sféře nebo hyperbolické rovině. Geometrie těchto ploch způsobuje odlišné průběhy trajektorií, přičemž v limitním případě sféra obsahuje Euklidovskou rovinu [1].

Problém cyklického unikání představuje opačný scénář, kdy každý brouk míří od druhého. Numerická pozorování naznačují konvergenci k pravidelnému polygonu nebo lineární konfiguraci. V případě tří brouků limitní konfigurace tvoří rovnostranný trojúhelník, což bylo formálně dokázáno v [2].

Tato zobecnění ukazují, že klasický problém cyklického pronásledování lze rozšířit do širší geometrické a dynamické oblasti, otevírající cestu k novým analýzám a modelům.

7. ZÁVĚR

V tomto článku jsme analyzovali problémy spojené s cyklickým pronásledováním a vytvořili modely pro různé varianty této úlohy, inspirované klasickým problémem Edouarda Lucase.

Nejdříve jsme řešili problém čtyř brouků v čtvercové formaci. Tento příklad umožnil seznámit čtenáře s principy cyklického pronásledování, prací s polárními souřadnicemi a výpočtem pronásledovací křivky, délky dráhy a času setkání.

Dále jsme zobecnili úlohu na n brouků umístěných v pravidelném n -úhelníku. Odvodili jsme pronásledovací křivky, délky drah a dobu setkání, čímž jsme získali i řešení původního trojúhelníkového problému.

Pro nesymetrický trojúhelník jsme sporem prokázali, že nesoučasné setkání brouků není možné, a odhadli jsme dobu současného setkání.

Na závěr jsme nastínili další modifikace, například pronásledování k -tého souseda, a odkázali na literaturu pro složitější případy, včetně pronásledování na sféře či hyperbolické rovině a opačného problému cyklického unikání.

Cyklické pronásledování je populární v zahraničních publikacích, ale v české a slovenské literatuře zatím má omezené zastoupení. Tento článek tak poskytuje výchozí rámec pro další rozvoj složitějších modelů a jejich analýzu.

REFERENCE

- [1] P. K. Aravind: *A symmetrical pursuit problem on the sphere and the hyperbolic plane*, The Mathematical Gazette **78** (1994), 30–36, DOI:10.2307/3619428.
- [2] M. Arnold, V. Zharnitsky: *Cyclic evasion in the Three Bug Problem*, The American Mathematical Monthly **122** (2015), 377–384.
- [3] M. S. Klamkin, D. J. Newman: *Cyclic pursuit or the “Three Bugs Problem”*, The American Mathematical Monthly **78** (1971), 631–639.
- [4] V. Kučerová: *Analýza problému cyklického pronásledování* [online], Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2024, Bakalářská práce, dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157621>.
- [5] U. Mukhopadhyay: *Logarithmic spiral – a splendid curve*. Resonance **9** (2004), 39–45.
- [6] P. J. Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, Princeton: Princeton University Press, 2012.
- [7] M. J. Seery: *Pursuit and regular n -gons*, The College Mathematics Journal **29** (1998), 228–229.

Vendula Kučerová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: 238624@vutbr.cz