

KONEČNÉ DIFERENCE A KVALITATIVNÍ ANALÝZA POSLOUPNOSTÍ

JAN PROKOP

ABSTRAKT. Článek se věnuje studiu konečných diferencí jakožto diskretní analogii spojitého diferenciálního počtu. Na základě vlastností diferenčního operátoru jsou odvozeny diskretní verze vět o střední hodnotě a dále je vybudována teorie lokálních a globálních extrémů posloupností. Zvláštní pozornost je věnována tzv. rozšířeným extrémům a jejich charakterizaci pomocí vyšších diferencí. Dále jsou odvozeny podmínky konvexnosti a konkávnosti posloupností v závislosti na chování jejich diferencí. Uvedené výsledky poskytují kompaktní aparát pro kvalitativní analýzu posloupností. Na závěr prezentujeme aplikaci odvozených výsledků na teoretických a aplikačních příkladech.

1. ÚVOD

Diferenciální počet představuje základní nástroj pro kvalitativní analýzu funkcí. V řadě problémů, ať už praktických nebo teoretických, však přirozeně vznikají diskretní struktury, buď ve formě posloupností, řešení diferenčních rovnic, nebo numerických aproximací spojitých problémů. Pro tyto situace je žádoucí vybudovat teorii, která by v diskretním prostředí plnila obdobnou roli jako klasický diferenciální počet. Jednoduchým příkladem může být *modus* (nejpravděpodobnější hodnota) diskretního rozdělení pravděpodobnosti. V literatuře jsou tyto výsledky většinou vysloveny bez detailnějšího komentáře, naším cílem v tomto článku je poskytnout čtenáři strukturovaný aparát, pomocí kterého je možné kvalitativně studovat posloupnosti. Pro zájemce o problematiku lze doporučit práce [1, 2, 3].

Přestože je pojem konečné difference dobře známý, systematická teorie kvalitativních vlastností posloupností, zejména teorie lokálních a globálních extrémů, není v literatuře obvykle prezentována v jednotném nebo úplném tvaru. Zvláště případ tzv. rozšířených extrémů, kdy extrém nastává ve více po sobě jdoucích indexech.

Článek je koncipován následovně. V kapitole 2 jsou zavedeny základní pojmy konečných diferencí a jejich vlastností. Kapitola 3 je věnována diskretním analogiím vět o střední hodnotě. V kapitole 4 je vybudována teorie lokálních extrémů

2020 MSC. Primární 39-01; Sekundární 39-00.

Klíčová slova. Konečné difference, diferenční počet, posloupnosti, lokální extrémy, globální extrémy, konvexní posloupnosti, konkávní posloupnosti, asymptoty, modus.

posloupností, včetně tzv. rozšířených lokálních extrémů a jejich charakterizace pomocí vyšších diferencí. Dále jsou zde odvozeny podmínky konvexnosti a konkávnosti posloupností spolu s teorií asymptot. Na závěr kapitoly 4 prezentujeme aplikace odvozených výsledků na jednom teoretickém a dvou aplikačních příkladech.

2. ZÁKLADNÍ POJMY A DEFINICE

Úvodním pojmem diferenčního počtu je analogie derivace z diferenciálního počtu, kterou nazýváme difference. Ještě než formálně zavedeme pojem difference posloupnosti, představíme základní značení.

Diskrétní interval na množině celých čísel budeme značit $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ a platí

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{a, a+1, \dots, b-1, b\},$$

kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, přičemž lze připustit $a = -\infty$, $b = +\infty$. Analogicky zavádíme i otevřený diskrétní interval

$$(a, b)_{\mathbb{Z}} = \{a+1, \dots, b-1\}.$$

Posloupností y_k definovanou na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ máme na mysli zobrazení $y : [a, b]_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Posloupnost y_k nazveme na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ *rostoucí*, resp. *klesající*, jestliže pro všechna $i, j \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ takové, že $i < j$ platí $y_i \leq y_j$, resp. $y_i \geq y_j$. Za předpokladu, že jsou tyto nerovnosti ostré, mluvíme o *ryze rostoucí*, resp. *ryze klesající* posloupnosti. Posloupnost nazýváme *monotónní* jestliže je rostoucí nebo klesající a *ryze monotónní* jestliže je ryze rostoucí nebo ryze klesající.

Definice 2.1 (Difference posloupnosti). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+h]_{\mathbb{Z}}$, kde $h \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ nazýváme posloupnost Δy_k *diferencí posloupnosti y_k na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$* a platí

$$\Delta_h y_k := y_{k+h} - y_k.$$

Diferenci v bodě $k_0 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ definujeme jako

$$\Delta_h y_{k_0} := y_{k_0+h} - y_{k_0}.$$

Parametr h nazýváme *krokem difference*.

V celém článku se omezíme na speciální případ $h = 1$ a budeme používat značení

$$\Delta y_k := \Delta_1 y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Definice 2.2 (Difference n -tého řádu). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ nazýváme posloupnost $\Delta^n y_k$ *diferencí posloupnosti y_k n -tého řádu* definovanou na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ a platí

$$\Delta^n y_k := \Delta(\Delta^{n-1} y_k).$$

Diferenci n -tého řádu v bodě $k_0 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ definujeme jako

$$\Delta^n y_{k_0} := \Delta(\Delta^{n-1} y_{k_0}).$$

Diferenční operátor vykazuje řadu vlastností analogických vlastnostem derivace funkce. Jejich přehled uvádí následující věta.

Věta 2.3 (Základní vlastnosti diferencí). *Nechť y_k a z_k jsou posloupnosti definované na vhodných intervalech, $m, n \in \mathbb{N}$ a $C \in \mathbb{R}$. Pak platí*

- (i) $\Delta^m(\Delta^n y_k) = \Delta^{m+n} y_k,$
- (ii) $\Delta(y_k \pm z_k) = \Delta y_k \pm \Delta z_k,$
- (iii) $\Delta(C y_k) = C \Delta y_k,$
- (iv) $\Delta(y_k z_k) = y_k \Delta z_k + z_{k+1} \Delta y_k,$
- (v) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right) = \frac{z_k \Delta y_k - y_k \Delta z_k}{z_k z_{k+1}}.$

Důkaz. Dokážeme pouze rovnosti (i) a (ii), ostatní rovnosti lze ukázat analogicky.

(i) Z definice 2.2 můžeme psát

$$\begin{aligned} \Delta^m(\Delta^n y_k) &= \Delta^m(\underbrace{\Delta(\Delta \dots (\Delta y_k))}_{n\text{-krát}}) = \Delta^{m+1}(\underbrace{\Delta(\Delta \dots (\Delta y_k))}_{(n-1)\text{-krát}}) \\ &= \Delta^{m+2}(\underbrace{\Delta(\Delta \dots (\Delta y_k))}_{(n-2)\text{-krát}}) = \dots = \Delta^{m+n} y_k. \end{aligned}$$

(ii) Rovnost dokážeme přímým výpočtem.

$$\begin{aligned} \Delta(y_k \pm z_k) &= (y_{k+1} \pm z_{k+1}) - (y_k \pm z_k) = y_{k+1} \pm z_{k+1} - y_k \mp z_k \\ &= (y_{k+1} - y_k) \pm (z_{k+1} - z_k) = \Delta y_k \pm \Delta z_k. \end{aligned}$$

□

3. DISKRÉTNÍ VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

V této kapitole se budeme zabývat diskrétními analogiemi vět o střední hodnotě, které hrají v diferenciálním počtu klíčovou úlohu. Zejména při důkazech tvrzení, které dávají do souvislosti kvalitativní vlastnosti funkcí a jejich derivace.

Ještě než vyslovíme věty o střední hodnotě, potřebujeme zavést analogii nulového bodu pro posloupnosti. V diferenciálním počtu nazýváme bod $a \in D_f$ *nulovým bodem* funkce f , jestliže

$$f(a) = 0.$$

Existenci takového zaručuje Bolzanova věta, která předpokládá, že je daná funkce spojitá a mění znaménko na nějakém podintervalu definičního oboru. V diskrétním počtu pracujeme s posloupnostmi, které spojitě nejsou. Zavádíme proto tzv. zobecněný nulový bod.

Definice 3.1 (Zobecněný nulový bod). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak říkáme, že má *zobecněný nulový bod* v bodě $k \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, jestliže platí právě jedna z následujících podmínek:*

1. $y_k = 0$ pro $k = a$;
2. $y_{k-1} \neq 0$ $\wedge$ $y_{k-1} y_k \leq 0$ pro $k \in [a+1, b+1]_{\mathbb{Z}}$.

Nyní můžeme vyslovit a dokázat věty střední hodnotě.

Věta 3.2 (Diskrétní Rolleova věta o střední hodnotě). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ taková, že platí $y_a = y_{b+1}$. Pak má posloupnost prvních diferencí Δy_k , definovaná na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$, alespoň jeden zobecněný nulový bod.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že posloupnost Δy_k nemá zobecněný nulový bod na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$. Pak pro všechna $k \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ platí

$$\Delta y_a \neq 0, \quad (3.1)$$

a

$$(\Delta y_{k-1} = 0) \vee (\Delta y_{k-1} \Delta y_k > 0). \quad (3.2)$$

Z podmínky (3.1) dostáváme, že první podmínka v (3.2) nastat nemůže. Zvolme za $k = a+1$, pak platí buď $\Delta y_a = 0$ nebo $\Delta y_a \Delta y_{a+1} > 0$. První možnost je v rozporu s (3.1) a tedy musí nutně platit

$$\Delta y_a \Delta y_{a+1} > 0.$$

Analogicky volbou $k = a+2$ a využití nerovnosti $\Delta y_a \Delta y_{a+1} > 0$ obdržíme, že musí nutně platit

$$\Delta y_{a+1} \Delta y_{a+2} > 0.$$

Indukcí tedy dostaneme, že podmínky (3.1) a (3.2) se redukuje na

$$\Delta y_a \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{k-1} \Delta y_k > 0,$$

pro všechna $k \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$. Odtud vidíme, že posloupnost Δy_k nemění na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ znaménko a zároveň nenabývá nulové hodnoty. To je spor, protože z podmínky, že Δy_k nemění znaménko, dostaneme, že původní posloupnost musí být ryze monotónní, což odporuje předpokladu $y_a = y_{b+1}$. $\square$

Vidíme, že se jedná o přímou analogii Rolleovy věty o střední hodnotě z diferenciálního počtu, kde za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na $[a, b]$, její diferencovatelnosti na (a, b) a vlastnosti, že $f(a) = f(b)$ platí, že existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Přímým zobecněním diskretní Rolleovy věty o střední hodnotě je diskretní Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Věta 3.3 (Diskrétní Lagrangeova věta o střední hodnotě). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak existuje index $j \in (a, b]_{\mathbb{Z}}$ takový, že platí buď*

$$\Delta y_j \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_{j-1},$$

nebo

$$\Delta y_{j-1} \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_j.$$

Důkaz. Definujme posloupnost u_k jako

$$u_k := y_k - k \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a}, \quad k \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}.$$

Pak platí

$$u_a = y_a - a \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} = \frac{(b+1)y_a - ay_{b+1}}{b+1-a},$$

$$u_{b+1} = y_{b+1} - (b+1) \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} = \frac{(b+1)y_a - ay_{b+1}}{b+1-a}.$$

Platí tedy $u_a = u_{b+1}$ a z věty 3.2 máme zaručenou existenci zobecněného nulového bodu posloupnosti Δu_k na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$. Tj. existuje nějaké $j \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ takové, že

$$\Delta u_{j-1} \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta u_{j-1} \Delta u_j \leq 0.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\Delta u_k = \Delta y_k - \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a},$$

můžeme psát

$$(\Delta y_{j-1} - \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a})(\Delta y_j - \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a}) \leq 0.$$

Odtud plyne, že

$$\min\{\Delta y_{j-1}, \Delta y_j\} \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \max\{\Delta y_{j-1}, \Delta y_j\}.$$

Tím pádem $\frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a}$ leží mezi hodnotami Δy_{j-1} a Δy_j a tedy

$$\Delta y_{j-1} \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_j \quad \text{nebo} \quad \Delta y_j \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_{j-1}.$$

□

Zde je podobnost s Lagrangeovou větou o střední hodnotě z diferenciálního počtu méně zřejmá. Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na $[a, b]$ a její diferencovatelnosti na (a, b) existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. VYŠETŘOVÁNÍ POSLOUPNOSTÍ

V této kapitole postupně vybudujeme teorii zabývající se kvalitativní analýzou posloupností. Ukážeme, jak lze využít konečné difference a jejich vlastnosti k vyšetřování posloupností.

4.1. Podmínky monotonie posloupnosti

Následující tvrzení nám dává do souvislosti nutné a postačující podmínky pro monotonii posloupností a posloupností prvních diferencí.

Věta 4.1 (Nutné a postačující podmínky pro monotonii posloupností). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí*

- (i) *Posloupnost y_k je rostoucí na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k \geq 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.*
- (ii) *Posloupnost y_k je ryze rostoucí na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k > 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.*
- (iii) *Posloupnost y_k je klesající na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k \leq 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.*

- (iv) Posloupnost y_k je ryze klesající na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k < 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.
- (v) Posloupnost je konstantní na $[a, b + 1]$ právě tehdy, když $\Delta y_k = 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.

Důkaz. Ukážeme platnost vlastností (i) a (ii). Ostatní vlastnosti lze dokázat analogicky.

- (i) ($\Rightarrow$): Jestliže je posloupnost y_k rostoucí, pak musí platit $y_{k+1} \geq y_k$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k \geq 0$, což je ekvivalentní s $\Delta y_k \geq 0$.
 ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí $\Delta y_k \geq 0$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k \geq 0$, což je ekvivalentní s $y_{k+1} \geq y_k$; to je definice rostoucí posloupnosti.
- (ii) ($\Rightarrow$): Jestliže je posloupnost y_k ryze rostoucí, pak musí platit $y_{k+1} > y_k$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k > 0$, což je ekvivalentní s $\Delta y_k > 0$.
 ($\Leftarrow$): Platí, že $\Delta y_k > 0$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k > 0$ což je ekvivalentní s $y_{k+1} > y_k$; to je definice ryze rostoucí posloupnosti.

□

4.2. Lokální extrémy posloupnosti

V následující podkapitole zavedeme pojem (ostrého) lokálního extrému posloupnosti, vyslovíme a dokážeme nutné a postačující podmínky na první a druhou diferenci pro existenci ostrého lokálního extrému posloupnosti.

Záměrně jsme rozdělili kapitoly o extrémech do dvou podkapitol (ostré) lokální extrémy a rozšířené lokální extrémy. Ukazuje se, že u posloupností není teorie extrémů jednoznačná jako ve spojitém případě, takže jednak z důvodu logického budování teorie, ale i z důvodu aplikačního považujeme za vhodné teorii extrémů rozdělit.

Definice 4.2 (Lokální extrémy posloupnosti). Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Pak o posloupnosti y_k říkáme, že má v bodě $K_0 \in [a + 1, b]_{\mathbb{Z}}$:

- (i) *Lokální minimum*, jestliže platí

$$y_{K_0-1} \geq y_{K_0} \leq y_{K_0+1}. \quad (4.1)$$

- (ii) *Lokální maximum*, jestliže platí

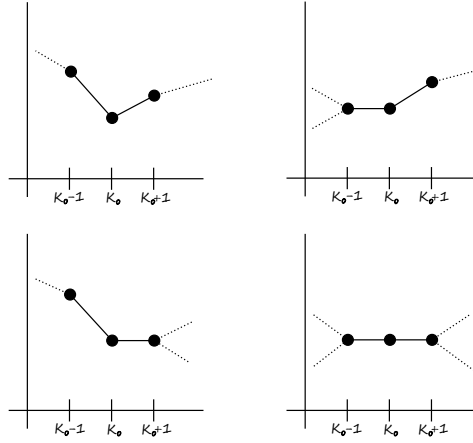
$$y_{K_0-1} \leq y_{K_0} \geq y_{K_0+1}. \quad (4.2)$$

V případě, že jsou nerovnosti v (4.1), resp. (4.2) ostré, pak mluvíme o *ostrém lokálním minimu*, resp. *ostrém lokálním maximu*.

Taková definice odpovídá naší intuitivní představě o (ostrém) lokálním minimu a (ostrém) lokálním maximu posloupnosti. Na obrázku 1 jsou postupně znázorněny všechny eventuality (ostrého) lokálního minima v bodě K_0 .

Na základě definice 4.2 můžeme vyslovit a dokázat nutnou a postačující podmínku na první diferenci pro existenci ostrého lokálního extrému posloupnosti.

Věta 4.3 (Nutné a postačující podmínky na první diferenci pro existenci ostrého lokálního extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí, že*



Obrázek 1. Znázornění ostrého lokálního minima v bodě K_0 (vlevo nahoře) a lokálního minima v bodě K_0 (ostatní obrázky).

- (i) posloupnost y_k má v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ ostré lokální minimum právě tehdy, když platí

$$\Delta y_{K_0} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} < 0,$$

- (ii) posloupnost y_k má v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ ostré lokální maximum právě tehdy, když platí

$$\Delta y_{K_0} < 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} > 0.$$

Důkaz. Dokážeme pouze bod (i), bod (ii) lze dokázat analogickým postupem.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že posloupnost y_k má v bodě K_0 ostré lokální minimum, tj.

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} < y_{K_0+1}.$$

Z první, resp. z druhé nerovnosti plyne

$$0 > \Delta y_{K_0-1}, \quad \text{resp.} \quad 0 < \Delta y_{K_0}.$$

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí $\Delta y_{K_0} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} < 0$. Z první, resp. druhé nerovnosti plyne

$$y_{K_0+1} - y_{K_0} > 0, \quad \text{resp.} \quad y_{K_0} - y_{K_0-1} < 0,$$

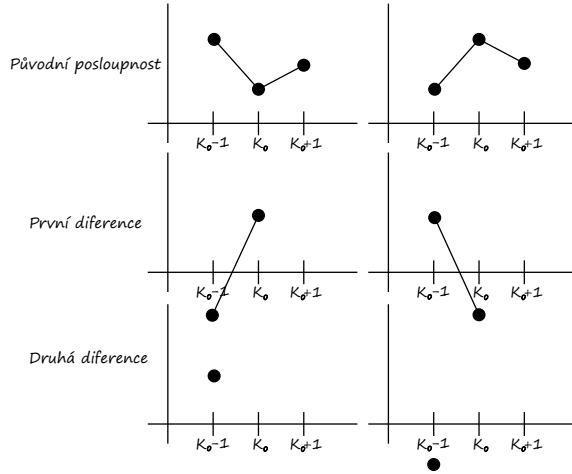
neboli

$$y_{K_0+1} > y_{K_0}, \quad \text{a} \quad y_{K_0} < y_{K_0-1},$$

což je definice ostrého lokálního minima. $\square$

Na obrázku 2 (nahore) jsou znázorněny posloupnosti, které mají v bodě K_0 ostré lokální minimum (vlevo), resp. ostré lokální maximum (vpravo), níže jsou znázorněny též první a druhé difference těchto posloupností.

Na základě obrázku 2 můžeme vyslovit a dokázat větu zahrnující druhou diferenci ve vztahu k ostrým lokálním extrémům.



Obrázek 2. Levý sloupec znázorňuje ostré lokální minimum v bodě K_0 a jeho první a druhou diferenci. Pravý sloupec znázorňuje ostré lokální maximum v bodě K_0 a jeho první a druhou diferenci.

Věta 4.4 (Nutné a postačující podmínky druhé diference pro existenci ostrého lokálního extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když je splněna jedna z následujících vzájemně ekvivalentních podmínek.*

- (i) *Posloupnost prvních diferencí Δy_k má zobecněný nulový bod na intervalu $(K_0 - 1, K_0)$, tj. platí, že $\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} < 0$ a navíc je na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí, resp. ryze klesající.*

(ii)

$$\Delta y_{K_0} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} < 0,$$

resp.

$$\Delta y_{K_0} < 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} > 0.$$

(iii)

$$\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} = y_{K_0+1} y_{K_0} - y_{K_0+1} y_{K_0-1} - y_{K_0}^2 + y_{K_0} y_{K_0-1} < 0 \quad (4.3)$$

a zároveň

$$\Delta^2 y_{K_0-1} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^2 y_{K_0-1} < 0, \quad (4.4)$$

kde podmínky v (4.4) znamenají, že posloupnost Δy_k je na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí, resp. ryze klesající.

Důkaz. Z věty 4.3 plyne, že podmínka (ii) je ekvivalentní s existencí ostrého lokálního extrému posloupnosti y_k v bodě K_0 . Tím je dokázána platnost podmínky (ii).

(ii) $\iff$ (i): Podmínka (ii) nám říká, že posloupnost Δy_k má na intervalu $(K_0 - 1, K_0)$ zobecněný nulový bod, tj.

$$\Delta y_{K_0} \Delta y_{K_0-1} < 0.$$

Zároveň díky tomu, že pro ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum platí nerovnosti

$$\Delta y_{K_0} > \Delta y_{K_0-1}, \quad \text{resp.} \quad \Delta y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0},$$

platí také, že posloupnost prvních diferencí Δy_k je na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí, resp. ryze klesající, což je přímo tvrzení podmínky (i).

(i) $\iff$ (iii): Z podmínky (i) máme

$$\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} < 0.$$

Po rozepsání diferencí dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} &< 0 \\ (y_{K_0} - y_{K_0-1})(y_{K_0+1} - y_{K_0}) &< 0 \\ y_{K_0} y_{K_0+1} - y_{K_0}^2 - y_{K_0-1} y_{K_0+1} + y_{K_0-1} y_{K_0} &< 0, \end{aligned}$$

což je přesně nerovnost (4.3). Navíc víme, že je posloupnost Δy_k na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí (pro ostré lokální minimum) a ryze klesající (pro ostré lokální maximum). To znamená, že platí nerovnosti

$$\Delta y_{K_0} > \Delta y_{K_0-1} \quad \text{resp.} \quad \Delta y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0}.$$

Po převedení těchto nerovností na druhé difference dostaneme

$$\Delta y_{K_0} > \Delta y_{K_0-1} \iff \Delta^2 y_{K_0-1} > 0 \quad \text{resp.} \quad \Delta y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0} \iff \Delta^2 y_{K_0-1} < 0.$$

Což jsou přesně nerovnosti v (4.4). $\square$

Důsledkem právě dokázané věty je následující tvrzení, které dává podmínky pro první a druhé difference do přímé spojitosti.

Důsledek 4.5 (Nutná a postačující podmínka druhé difference pro existenci lokálního ostrého extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum právě tehdy, když*

$$\Delta^2 y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0} > 0,$$

resp.

$$\Delta^2 y_{K_0-1} < \Delta y_{K_0} < 0.$$

Nyní zavedeme pojem globálních extrémů posloupnosti, které budou představovat absolutně největší/nejmenší hodnotu posloupnosti na daném intervalu.

Definice 4.6 (Globální extrémy posloupnosti). Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ a nechť $K_0 \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak říkáme, že posloupnost y_k má na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ globální minimum, resp. globální maximum v bodě K_0 jestliže platí

$$y_{K_0} \leq y_j, \quad \text{resp.} \quad y_{K_0} \geq y_j \quad \forall j \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}.$$

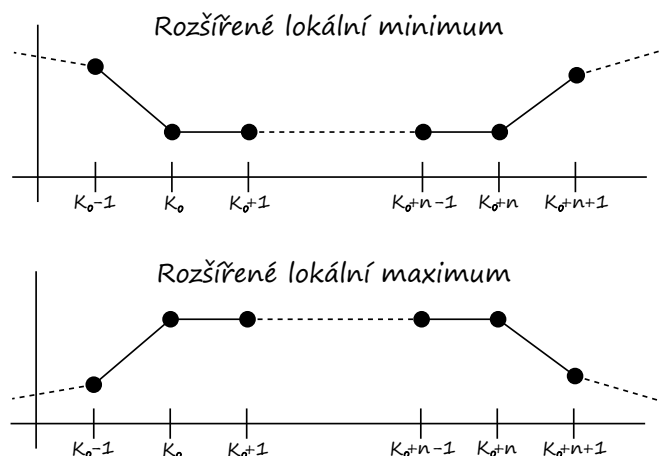
V následující poznámce uvedeme postup jak hledat globální extrémy.

Poznámka 4.7 (Nalezení globálních extrémů). Předpokládejme, že máme posloupnost y_k definovanou na nějakém intervalu $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Za pomoci výše uvedených vět nalezneme ostré lokální extrémy a jejich hodnoty. Následně tyto hodnoty porovnáme s hodnotami v bodech a a $b + 1$. Porovnáním všech těchto hodnot obdržíme globální extrémy. Jestliže uvažujeme posloupnost na $\mathbb{Z}$ a $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \pm\infty$ nebo $\lim_{k \rightarrow -\infty} y_k = \pm\infty$, pak taková posloupnost nemá globální maximum, resp. minimum a je neomezená, tj. pojem globálního extrému v takovém případě ztrácí smysl.

4.3. Rozšířené lokální extrémy

Při vyšetřování posloupností se můžeme setkat se situací, kdy má posloupnost v bodech K_0 a $K_0 + n$ lokální minimum, resp. lokální maximum a ve všech bodech na intervalu $[K_0 + 1, K_0 + n - 1]$ nabývá lokálního minima i lokálního maxima zároveň. Tyto situace jsou znázorněny na obrázku 3.

Z praktických důvodů je výhodné takovou posloupnost lokálních extrémů vnímat jakožto jeden „lokální“ extrém, takové extrémy budeme nazývat rozšířené lokální extrémy.



Obrázek 3. Znárodnění rozšířených extrémů, kde horní graf ilustruje rozšířené lokální minimum a dolní graf ilustruje rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$.

Definice 4.8 (Rozšířené lokální extrémy). Necht je y_k posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Řekněme, že tato posloupnost nabývá na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$ rozšířeného lokálního extrému jestliže, body $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$ jsou body lokálního extrému a platí

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = \dots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1}, \quad (4.5)$$

nebo

$$y_{K_0-1} < y_{K_0} = y_{K_0+1} = \dots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} > y_{K_0+n+1}. \quad (4.6)$$

V případě splnění (4.5) mluvíme o *rozšířeném lokálním minimu*. A v případě splnění (4.6) mluvíme o *rozšířeném lokálním maximu*.

Rozšířené lokální extrémy jsou tak vlastně zobecněním ostrých lokálních extrémů z předchozí kapitoly. Kdybychom v definici 4.8 uvažovali $n = 0$, dostali bychom tak ostré lokální extrémy z předchozí podkapitoly.

Naším cílem nyní bude určit nutné a postačující podmínky pro výskyt rozšířených lokálních extrémů. Vyslovíme a dokážeme věty analogické k větám 4.3, 4.4 a 4.5, pro rozšířené extrémy.

Věta 4.9 (Nutné a postačující podmínky první difference pro existenci rozšířeného extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí:*

- (i) *Posloupnost y_k má na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální minimum právě tehdy, když*

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} > 0. \quad (4.7)$$

- (ii) *Posloupnost y_k má na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální maximum právě tehdy, když*

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} < 0. \quad (4.8)$$

Důkaz. Dokážeme pouze bod (i). Bod (ii) lze dokázat analogickým postupem.

- (i) ($\Rightarrow$): Víme, že posloupnost y_k má na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální minimum a tedy z definice 4.8 musí platit

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = y_{K_0+2} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1}.$$

Když vyjádříme jednotlivé difference, tak dostaneme

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} > 0.$$

Tím dostáváme dokazovanou implikaci.

($\Leftarrow$): Víme, že pro posloupnost y_k platí

$$\Delta y_{K_0-1} < 0, \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} > 0.$$

Po rozepsání jednotlivých diferencí obdržíme

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1},$$

což je přesně definice rozšířeného lokálního minima.

□

Obdobně jako v podkapitole 4.2, kde jsme se věnovali ostrým extrémům nyní prezentujeme podmínky na druhou diferenci a existenci rozšířených extrémů.

Věta 4.10 (Nutné a postačující podmínky druhé difference pro existenci rozšířeného extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

$$\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0+n} < 0, \quad (4.9)$$

$$\Delta^2 y_{K_0-1} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^2 y_{K_0-1} < 0 \quad (4.10)$$

$$\Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0. \quad (4.11)$$

Důkaz. Chceme dokázat ekvivalenci, důkaz tedy provedeme dvojitou implikací. Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že má posloupnost y_k rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Z definice 4.8 víme, že platí

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1},$$

resp.

$$y_{K_0-1} < y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} > y_{K_0+n+1}.$$

Z věty 4.9 platí, že posloupnost prvních diferencí musí v bodech K_0-1 a K_0+n měnit znaménko. Dále musí platit, že pro rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum, musí být posloupnost prvních diferencí záporná, resp. kladná v bodě K_0-1 a kladná, resp. záporná v bodě K_0+n . Odtud plynou podmínky (4.9) a (4.10).

Podmínka (4.11) také plyne přímo z definice, jelikož musí platit

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n},$$

a to jak pro rozšířené lokální minimum, tak i pro rozšířené lokální maximum. Tím je dokázána první implikace.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že jsou splněny podmínky (4.9), (4.10) a (4.11). Podmínka (4.11) nám zaručuje, že bude platit

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n}.$$

Dále podmínka (4.9) nám zaručuje, že posloupnost prvních diferencí v bodech K_0-1 a K_0+n bude střídat znaménka. Díky této vlastnosti víme, že se bude jednat o extrém.

Nerovnosti (4.10) určí, o který extrém se bude jednat. Pokud se bude jednat o rozšířené lokální minimum, pak bude posloupnost prvních diferencí v bodě K_0-1 záporná a v bodě K_0+n kladná, a naopak, jestliže se bude jednat o rozšířené lokální maximum. Alternativně můžeme rozepsat druhé difference a zjistíme, že za předpokladu, že bude splněna podmínka (4.10) obdržíme podmínky z věty 4.9. $\square$

Na závěr podkapitoly týkající se rozšířené extrémů ukážeme, jak lze využít posloupností vyšších diferencí při hledání rozšířené extrémů posloupností.

Ještě před samotným tvrzením dokážeme pomocné lemma.

Lemma 4.11. *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ a necht pro nějaká $K_0 \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, platí*

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n} = c \iff \Delta y_{K_0} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\Delta^n y_{K_0} = 0, \quad (4.12)$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1)^{n+1} \Delta y_{K_0-1}, \quad (4.13)$$

$$\Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n}, \quad (4.14)$$

$$\Delta^{n+1}y_{K_0-1} = (-1)^n \Delta y_{K_0-1}, \quad (4.15)$$

$$\Delta^{n+1}y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n}. \quad (4.16)$$

Důkaz. Za využití binomické věty není obtížné dokázat, že platí následující rovnosti:

$$(i) \quad \Delta^n y_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{k+n-j},$$

$$(ii) \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

Důkaz rovnosti (4.12): V rovnosti (i) volme $k = K_0$, pak pro indexy $j = 0, 1, \dots, n$, platí $y_{K_0+n-j} = c$, tj. za využití rovnosti (ii) dostaneme

$$\Delta^n y_{K_0} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0+n-j} = c \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = c(1-1)^n = 0,$$

čímž jsme dokázali rovnost (4.12).

Důkaz rovnosti (4.13): Analogicky za využití rovnosti (i) a volbu $k = K_0 - 1$ dostaneme

$$\Delta^n y_{K_0-1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0-1+n-j}.$$

Jelikož pro indexy $j = 0, 1, \dots, n-1$ je $K_0-1+n-j \in \{K_0, K_0+1, \dots, K_0+n-1\}$, tedy $y_{K_0-1+n-j} = c$, pak platí

$$\Delta^n y_{K_0-1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0-1+n-j} = (-1)^n y_{K_0-1} + c \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j}.$$

Z rovnosti (ii) dostaneme

$$c \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} = -c(-1)^n \binom{n}{n} = c(-1)^{n+1}.$$

Celkově tedy platí

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1)^n y_{K_0-1} + c(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}(c - y_{K_0-1}) = (-1)^{n+1} \Delta y_{K_0-1},$$

čímž jsme dokázali rovnost (4.13).

Důkaz rovnosti (4.14): V rovnosti (i) volme $k = K_0 + 1$, pak dostaneme

$$\Delta^n y_{K_0+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0+1+n-j}.$$

Jelikož pro indexy $j = 1, \dots, n-1, n$ je $K_0+1+n-j \in \{K_0+1, K_0+2, \dots, K_0+n\}$, tedy $y_{K_0+1+n-j} = c$, pak platí

$$\Delta^n y_{K_0+1} = y_{K_0+n+1} + c \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j}.$$

Z rovnosti (ii) dostaneme

$$c \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} = -c \binom{n}{0} = -c.$$

Celkově tedy platí

$$\Delta^n y_{K_0+1} = y_{K_0+n+1} - c = (y_{K_0+n+1} - y_{K_0+n}) = \Delta y_{K_0+n},$$

čímž jsme dokázali rovnost (4.14).

Důkaz rovností (4.15) a (4.16): Z definice platí $\Delta^{n+1} y_i = \Delta^n y_{i+1} - \Delta^n y_i$. Dále za využití rovností (4.12), (4.13) a (4.14) můžeme psát:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = \Delta^n y_{K_0} - \Delta^n y_{K_0-1} = (-1)^n \Delta y_{K_0-1} \quad \text{pro } i = K_0 - 1.$$

$$\Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta^n y_{K_0+1} - \Delta^n y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} \quad \text{pro } i = K_0.$$

Tím jsme dokázali rovnosti (4.15) a (4.16). $\square$

Nyní již můžeme přímo vyslovit větu, která dává do souvislosti posloupnosti vyšších diferencí a rozšířené extrémy.

Věta 4.12 (Posloupnosti vyšších diferencí a rozšířené extrémy). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum právě tehdy, když:*

Pro n liché:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} > 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^{n+1} y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} < 0. \quad (4.17)$$

Pro n sudé:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^{n+1} y_{K_0-1} > 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} < 0. \quad (4.18)$$

Navíc

- (i) *Pokud je n sudé, pak platí, že posloupnost $\Delta^n y_k$ má v K_0 ostrý extrém, kde $\Delta^n y_{K_0} = 0$, tj. $\Delta^n y_{K_0-1} > 0 < \Delta^n y_{K_0+1}$, resp. $\Delta^n y_{K_0-1} < 0 > \Delta^n y_{K_0+1}$.*
- (ii) *Pokud n liché, platí, že posloupnost $\Delta^n y_k$ v bodech K_0-1, K_0, K_0+1 splňuje nerovnosti*

$$\Delta^n y_{K_0-1} < 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^n y_{K_0-1} > 0,$$

$$\Delta^n y_{K_0} = 0,$$

$$\Delta^n y_{K_0+1} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^n y_{K_0+1} < 0.$$

Důkaz. Nechť je y_k posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Provedeme důkaz dvojistou implikací.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že posloupnost y_k má rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$.

Víme, že platí

$$\Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0,$$

což je ekvivalentní s

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} = c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Dále víme, že platí:

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 < \Delta y_{K_0+n} \quad \text{pro rozšíření lokálního minima,} \quad (4.19)$$

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 > \Delta y_{K_0+n} \quad \text{pro rozšíření lokálního maxima.} \quad (4.20)$$

Za využití lemmatu 4.11, resp. rovností (4.12)–(4.16) a nerovností (4.19), (4.20) dostaneme následující vlastnosti:

- V případě rozšířeného lokálního minima:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (-1)(\Delta y_{K_0-1}) > 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ liché,}$$

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (+1)(\Delta y_{K_0-1}) < 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé.}$$

- V případě rozšířeného lokálního maxima:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (+1)(\Delta y_{K_0-1}) < 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ liché,}$$

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (-1)(\Delta y_{K_0-1}) > 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé.}$$

Tím jsme dokázali nerovnosti (4.17) a (4.18). Nyní ukážeme body (i) a (ii). Z lemmatu 4.11 přímo dostáváme:

- $\Delta^n y_{K_0} = 0$.

- V případě rozšířeného lokálního minima:

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) > 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé,}$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (+1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) < 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ liché.}$$

- V případě rozšířeného lokálního maxima:

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) < 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé,}$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (+1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) > 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ liché.}$$

Odtud plyne:

- (i) Je-li n sudé, pak $\Delta^n y_{K_0} = 0$ a

$$\Delta^n y_{K_0-1} > 0 < \Delta^n y_{K_0+1} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního minima,}$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} < 0 > \Delta^n y_{K_0+1} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního maxima,}$$

tedy $\Delta^n y_k$ má v bodě K_0 ostrý extrém.

- (ii) Je-li n liché, pak má uspořádané trojice $(\Delta^n y_{K_0-1}, \Delta^n y_{K_0}, \Delta^n y_{K_0+1})$ znaménka

$$(-, 0, +) \quad \text{v případě rozšířeného lokálního minima,}$$

$$(+, 0, -) \quad \text{v případě rozšířeného lokálního maxima.}$$

($\Leftarrow$): Necht' platí podmínky (4.17), (4.18), (i) a (ii) a zároveň

$$\Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \dots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0, \quad (4.21)$$

tj. ekvivalentně $y_{K_0} = \dots = y_{K_0+n} = c$. Potom lze použít lemma 4.11, ze kterého plyne

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (-1)^n \Delta y_{K_0-1}, \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n}.$$

Znaménka $(n+1)$ -ní difference tedy určují znaménka příslušných prvních diferencí:

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 < \Delta y_{K_0+n} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního minima,}$$

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 > \Delta y_{K_0+n} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního maxima.}$$

Společně s (4.21) jsou tak splněny podmínky věty 4.9, tj. (4.7), (4.8), a tedy posloupnost y_k má na $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum. $\square$

Na obrázku 4 je znázorněn princip právě dokázané věty, pro $n = 2$ a $n = 3$ na rozšířeném lokálním maximu.

Analogicky jako v předchozí podkapitole, můžeme definovat rozšířený globální extrém posloupnosti.

Definice 4.13 (Rozšířený globální extrém). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak říkáme, že má posloupnost y_k *rozšířené globální minimum*, resp. *rozšířené globální maximum* na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, jestliže platí

$$y_i \leq y_j, \quad \text{resp.} \quad y_i \geq y_j, \quad \forall i \in [K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}, \quad \forall j \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}.$$

Při hledání rozšířených globálních extrémů, postupujeme analogicky jako u ostrých globálních extrémů.

4.4. Konvexní a konkávní posloupnosti

V této podkapitole se podíváme, jak je možné zavést (ryze) konvexní, resp. (ryze) konkávní posloupnost a odvodíme podmínky první a druhé difference pro ověření (ryzí) konvexnosti a konkávnosti posloupnosti.

Definice 4.14 ((Ryze) konvexní/konkávní posloupnost). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Tuto posloupnost nazýváme *konvexní* na intervalu $[A, B+1]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in [A, B+1]_{\mathbb{Z}}$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$y_{x_2} \leq y_{x_1} + \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \quad (4.22)$$

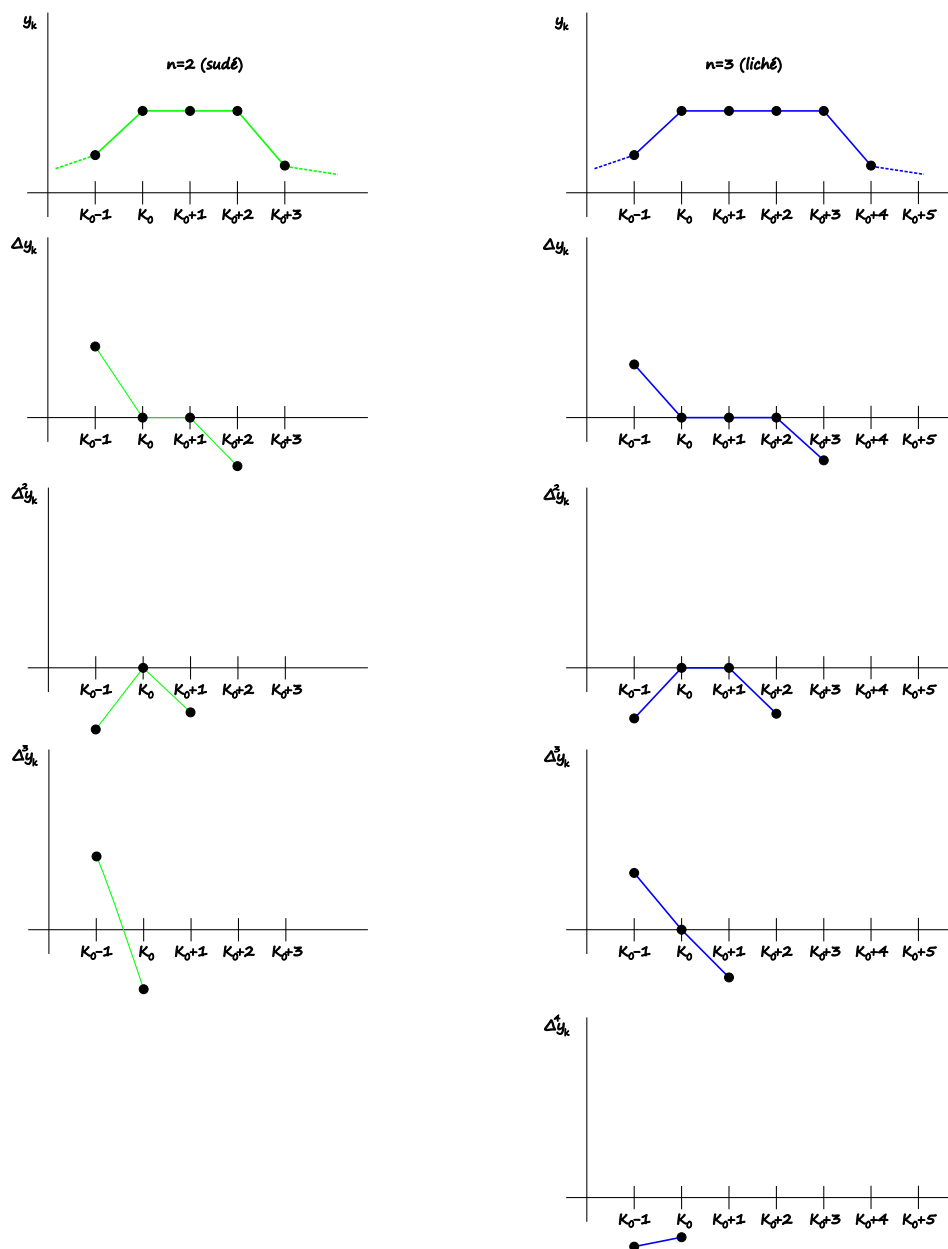
Obdobně posloupnost y_k nazýváme *konkávní* na intervalu $[A, B+1]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in [A, B+1]_{\mathbb{Z}}$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$y_{x_2} \geq y_{x_1} + \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \quad (4.23)$$

Jestliže v nerovnostech (4.22), resp. (4.23) nahradíme neostře nerovnosti ostrými nerovnostmi, dostaneme definici *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní* posloupnosti.

Vidíme, že definice konvexních a konkávních posloupností je diskrétní analogií konvexních a konkávních funkcí a tedy přímo z definice lze odvodit, že posloupnost, která je konvexní a konkávní zároveň je posloupnost aritmetická.

Poznámka 4.15. Kdybychom v definici 4.14 např. nerovnost (4.22) vynásobili -1 dostali bychom z konvexní posloupnosti posloupnost konkávní. Tedy, jestliže je nějaká posloupnost y_k na intervalu konvexní, pak je posloupnost $-y_k$ na tomto intervalu konkávní a naopak.



Obrázek 4. Differencování posloupností s rozšířeným lokálním maximem pro $n = 2$ a $n = 3$.

V následující větě ukážeme alternativní definici pro konvexní, resp. konkávní posloupnost.

Věta 4.16 (Alternativní definice konvexní/konkávní posloupnosti). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Dále nechť je tato posloupnost konvexní, resp. konkávní na $[A, B+1]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ a nechť $x_1, x_2, x_3 \in [A, B+1]_{\mathbb{Z}}$ jsou libovolné body, které splňují $x_1 < x_2 < x_3$. Pak platí vzájemně ekvivalentní nerovnosti (4.24)–(4.26), resp. (4.27)–(4.29).*

$$\text{Konvexní} \quad \frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}, \quad (4.24)$$

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}, \quad (4.25)$$

$$\frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}. \quad (4.26)$$

$$\text{Konkávní} \quad \frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \geq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}, \quad (4.27)$$

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \geq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}, \quad (4.28)$$

$$\frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \geq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}. \quad (4.29)$$

Jestliže jsou nerovnosti v (4.24)–(4.26), resp. (4.27)–(4.29) ostré, pak je posloupnost ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

Důkaz. Ukážeme zvlášť, že nerovnosti (4.24)–(4.29) jsou ekvivalentní s nerovnostmi (4.22)–(4.23) nehledě na to, zda jsou nerovnosti ostré nebo neostré. Jestliže ukážeme ekvivalenci pro neostré nerovnosti, pak z toho automaticky plyne, že jsou nerovnosti ekvivalentní i pro ostré nerovnosti. Z poznámky 4.15 víme, že stačí provést důkaz pouze pro konvexní posloupnosti.

Předpokládejme, že je posloupnost y_k konvexní. Pak musí nutně platit nerovnost (4.22). Jestliže z pravé strany nerovnosti (4.22) odečteme člen y_{x_1} a následně celou nerovnost vydělíme členem $(x_2 - x_1)$, tak dostaneme (4.24).

Z nerovnosti (4.24) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_1) &\leq (y_{x_3} - y_{x_1})(x_2 - x_1), \\ (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_1) &\leq (y_{x_3} - y_{x_2})(x_2 - x_1) + (y_{x_2} - y_{x_1})(x_2 - x_1), \\ (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_1 - x_2 + x_1) &\leq (y_{x_3} - y_{x_2})(x_2 - x_1), \\ (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_2) &\leq (y_{x_3} - y_{x_2})(x_2 - x_1), \\ \frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} &\leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali implikaci (4.24) $\Rightarrow$ (4.25). Analogicky lze dokázat implikace (4.25) $\Rightarrow$ (4.26) a (4.26) $\Rightarrow$ (4.24). $\square$

Obdobně, jako v diferenciálním počtu, je možné odvodit podmínky na první a vyšší difference v souvislosti s konvexností, resp. konkávností posloupnosti. V následujících větách tyto podmínky vyslovíme a dokážeme.

Věta 4.17 (První diference a (ryzí) konvexnost/konkávnost). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak je posloupnost y_k (ryze) konvexní, resp. (ryze) konkávní právě tehdy, když posloupnost prvních diferencí Δy_k (ryze) rostoucí, resp. (ryze) klesající na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že konvexní posloupnost můžeme změnou znaménka převést na konkávní posloupnost, stačí nám důkaz provést pouze pro konvexní posloupnosti.

($\Rightarrow$): Nechť je posloupnost y_k konvexní na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, tj. pro body $x_1, x_2, x_3 \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}.$$

Ukážeme, že obecně platí $\Delta y_{x_1} \leq \Delta y_{x_3}$. Na bod x_2 se nekladou žádné požadavky kromě toho, že musí být splněny nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$. Proto můžeme volit $x_2 := x_1 + 1$ a dostaneme tak

$$\frac{y_{x_1+1} - y_{x_1}}{x_1 + 1 - x_1} = \frac{\Delta y_{x_1}}{1} = \Delta y_{x_1}.$$

Obdobně můžeme volit přeznačení $x_2 := x_3$ a zároveň $x_3 := x_3 + 1$ a dostaneme tak

$$\frac{y_{x_3+1} - y_{x_3}}{x_3 + 1 - x_3} = \frac{\Delta y_{x_3}}{1} = \Delta y_{x_3}.$$

Kombinací těchto dvou voleb dostaneme odhad

$$\Delta y_{x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \leq \Delta y_{x_3}.$$

Odtud platí

$$\Delta y_{x_1} \leq \Delta y_{x_3}.$$

Vzhledem k tomu, že body x_1, x_2 a x_3 volíme libovolně, tyto odhady platí na celém intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$. Posloupnost Δy_k , pak musí být (ryze) rostoucí na celém intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že posloupnost prvních diferencí Δy_k je (ryze) rostoucí pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$. Budeme vycházet z věty 4.16 a ukážeme, že pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí (4.24), tj.

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}.$$

Mějme libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$, které splňují nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$. Pak platí

$$\Delta y_{x_1} \leq \Delta y_{x_2} \leq \Delta y_{x_3}.$$

Z věty 3.3 existují indexy $i \in (x_2, x_3]_{\mathbb{Z}}$ a $j \in (x_1, x_2]_{\mathbb{Z}}$, kde $j < i$ takové, že

$$\begin{aligned} \Delta y_{i-1} &\leq \frac{y_{x_3+1} - y_{x_2}}{x_3 + 1 - x_2} \leq \Delta y_i, \\ \Delta y_{j-1} &\leq \frac{y_{x_2+1} - y_{x_1}}{x_2 + 1 - x_1} \leq \Delta y_j. \end{aligned}$$

Navíc z monotonie musí platit

$$\Delta y_{j-1} \leq \Delta y_j \leq \Delta y_{i-1} \leq \Delta y_i.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{y_{x_2+1} - y_{x_1}}{x_2 + 1 - x_1} \leq \frac{y_{x_3+1} - y_{x_2}}{x_3 + 1 - x_2}.$$

Jelikož jsou body x_1, x_2 a x_3 voleny libovolně, plyne z poslední nerovnosti

$$\frac{x_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}.$$

Ryzí konvexnost dostaneme analogickým postupem. $\square$

Následující věta nám dává do souvislosti druhou diferenci posloupnosti a její konvexnost/konkávnost.

Věta 4.18 (Druhá diference a (ryzí) konvexnost/konkávnost). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí:*

- (i) *Posloupnost y_k je ryze konvexní, resp. ryze konkávní na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta^2 y_k > 0$, resp. $\Delta^2 y_k < 0$ na intervalu $[a, b-1]_{\mathbb{Z}}$.*
- (ii) *Posloupnost y_k je konvexní, resp. konkávní na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta^2 y_k \geq 0$, resp. $\Delta^2 y_k \leq 0$ na intervalu $[a, b-1]_{\mathbb{Z}}$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro (ryze) konvexní posloupnosti.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že je posloupnost y_k (ryze) konvexní. Z věty 4.17 víme, že Δy_k bude (ryze) rostoucí na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ a tedy z věty 4.1 dostaneme podmínku, že druhá diference musí být (ostře) větší než nula.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí $\Delta^2 y_k \geq 0$, resp. $\Delta^2 y_k > 0$. Pak z věty 4.1 musí být posloupnost Δy_k rostoucí, resp. ryze rostoucí, a tedy z věty 4.17 dostaneme, že posloupnost y_k je konvexní, resp. ryze konvexní. $\square$

Při zkoumání konvexnosti, resp. konkávnosti posloupností hrají významnou roli tzv. inflexní body, které se nacházejí v místech, kde posloupnost přechází z ryze konvexní na ryze konkávní, resp. z ryze konkávní na ryze konvexní posloupnost.

Definice 4.19 (Inflexní bod). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Říkáme, že bod $x_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ je *inflexním bodem*, jestliže existuje $A \in \mathbb{N}$, takové, že je posloupnost y_k na $[x_0, x_0+A]_{\mathbb{Z}}$ ryze konvexní a na $[x_0-A, x_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze konkávní, nebo naopak.*

V následující větě uvádíme podmínky první a druhé diference, pro existenci inflexních bodů.

Věta 4.20 (Nutné a postačující podmínky pro existenci inflexních bodů). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak $x_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ je inflexním bodem právě tehdy, když existuje $A \in \mathbb{N}$ takové, že je splněna jedna z následujících ekvivalentních podmínek:*

- (i) *Posloupnost Δy_k je ryze rostoucí na $[x_0-A, x_0-1]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň ryze klesající na $[x_0, x_0+A-1]_{\mathbb{Z}}$,
nebo*

- posloupnost Δy_k je ryze klesající na $[x_0 - A, x_0 - 1]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň ryze rostoucí na $[x_0, x_0 + A - 1]_{\mathbb{Z}}$.
- (ii) $\Delta^2 y_k < 0$ na $[x_0, x_0 + A - 2]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň $\Delta^2 y_k > 0$ na $[x_0 - A, x_0 - 2]_{\mathbb{Z}}$ nebo $\Delta^2 y_k > 0$ na $[x_0, x_0 + A - 2]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň $\Delta^2 y_k < 0$ na $[x_0 - A, x_0 - 2]_{\mathbb{Z}}$.

Důkaz. Tvrzení věty plyne přímo z definice inflexních bodů 4.19 a vět 4.18 a 4.17. $\square$

4.5. Asymptoty posloupností

V předposlední podkapitole se zaměříme na teorii asymptot posloupností. Teorie přímo vychází z diferenciálního počtu a je tak její čistou analogií.

Definice 4.21 (Asymptota posloupnosti). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, +\infty)_{\mathbb{Z}}$, resp. $(-\infty, b]_{\mathbb{Z}}$. Aritmetická posloupnost $x_k = Ak + B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptotou se směrnici* posloupnosti y_k , jestliže platí $\lim_{k \rightarrow +\infty} (y_k - (Ak + B)) = 0$, resp. $\lim_{k \rightarrow -\infty} (y_k - (Ak + B)) = 0$.

Věta 4.22 (O asymptotě se směrnici). *Posloupnost $x_k = Ak + B$ je asymptotou posloupnosti y_k definované na $[a, \infty)_{\mathbb{Z}}$ pro $k \rightarrow +\infty$, resp. $(-\infty, b]_{\mathbb{Z}}$ pro $k \rightarrow -\infty$ právě tehdy, když*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{k} = A, \quad a \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (y_k - Ak) = B,$$

resp.

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{y_k}{k} = A, \quad a \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} (y_k - Ak) = B.$$

Důkaz. Přímo z definice plyne, že posloupnost $x_k = Ak + B$ je asymptotou posloupnosti y_k právě tehdy, když platí $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} (y_k - Ak) = B$. Odtud dostáváme, že $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y_k}{k} - A \right) = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{B}{k} = 0$, a tedy nutně $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{y_k}{k} = A$. $\square$

Důsledkem této věty je následující tvrzení, které uvádíme bez důkazu.

Důsledek 4.23. *Konstantní posloupnost $x_k = B$ je asymptotou posloupnosti y_k pro $k \rightarrow \pm\infty$ právě tehdy, když $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} y_k = B$.*

4.6. Aplikace a příklady vyšetřování posloupností

V této podkapitole shrneme všechny výše dokázané věty a výsledky týkající se vyšetřování posloupností. Následně ilustrujeme vyšetřování posloupností na teoretických a aplikačních příkladech.

Při vyšetřování posloupností budeme postupovat podle návodu níže.

Poznámka 4.24 (Kvalitativní analýza posloupnosti). Necht je y_k posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$.

- (i) Za využití věty 4.1 nalezneme **intervaly monotonie** posloupnosti.
- (ii) Pomocí vět 4.3, 4.4, 4.5, 4.9, 4.10 a 4.12 nalezneme **ostré** a **rozšířené lokální extrémy** a prověříme jejich okolí, zda se opravdu jedná ostré/rozšířené lokální extrémy.

- (iii) Ze znalosti ostrých/rozšířených lokálních extrémů z předchozího bodu, vyšetříme hodnoty posloupnosti v bodech a a $b+1$ (popřípadě pro $a, b+1 = \pm\infty$ vyšetříme hodnotu limit v $\pm\infty$) a porovnáme je s lokálními extrémy z předchozího bodu. Nalezneme tak **globální extrémy** (pokud existují).
- (iv) Pomocí vět 4.17 a 4.18 nalezneme **intervalu konvexnosti a konkávnosti**.
- (v) Za využití věty 4.20 (popřípadě 4.17 a 4.18) nalezneme **inflexní body**.
- (vi) Za předpokladu, že $a = -\infty$, resp. $b+1 = +\infty$, nalezneme pomocí vět 4.22 a 4.23, **asymptoty se směrnici**.
- (vii) Za pomoci informací z předchozích bodů, provedeme **přibližný náčrt průběhu grafu posloupnosti y_k** .

Pomocí poznámky 4.24 se nyní podíváme, na konkrétní příklady vyšetřování posloupností a jejího využití.

4.6.1. Vyšetřování posloupností. Ještě než si ukážeme nějaké přímé aplikace vyšetřování posloupností, demonstrováme užitečnost poznámky 4.24 na následujícím příkladu.

Příklad 4.25 (Analýza posloupnosti $y_k = k^2 2^k$). Mějme posloupnost

$$y_k = k^2 2^k,$$

která je definovaná na $\mathbb{Z}$. Vyšetřete průběh posloupnosti y_k na $\mathbb{Z}$.

Budeme postupovat přesně v krocích uvedených v poznámce 4.24.

- (i) **Monotonie:** Nalezneme posloupnost prvních diferencí

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = (k+1)^2 2^{k+1} - k^2 2^k = 2^k [2(k+1)^2 - k^2] = 2^k (k^2 + 4k + 2).$$

Protože $2^k > 0$ pro všechna k , o znaménku Δy_k rozhoduje člen

$$q(k) := k^2 + 4k + 2 = (k+2-\sqrt{2})(k+2+\sqrt{2}).$$

Jeho reálné kořeny jsou $-2 \pm \sqrt{2} \approx -3.414$ a -0.586 . Platí tedy

$$q(k) \begin{cases} > 0, & k \leq -4 \text{ nebo } k \geq 0, \\ < 0, & k \in \{-3, -2, -1\}. \end{cases}$$

Podle 4.1 platí, že je posloupnost y_k rostoucí na $(-\infty, -4]_{\mathbb{Z}} \cup [0, \infty)_{\mathbb{Z}}$ a klesající na $[-4, 0]_{\mathbb{Z}}$.

- (ii) **Rozšířené/ostře extrémy:**

- (a) **Lokální extrémy:** Podle věty 4.3 nastane lokální maximum v bodě K_0 , když

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0} < 0,$$

analogicky lokální minimum je v bodě K_0 , když

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0} > 0.$$

Vidíme, že změna znaménka posloupnosti Δy_k z $+$ na $-$ nastane mezi body $k = -4$ a $k = -3$, tedy

ostře lokální maximum je v $k = -3$ s hodnotou $y_{-3} = \frac{9}{8}$.

Přechod $- \rightarrow +$ je mezi $k = -1$ a $k = 0$, tedy

ostré lokální minimum v $k = 0$ s hodnotou $y_0 = 0$.

- (b) **Globální extrémy:** Podíváme se jakých hodnot nabývá posloupnost v krajních bodech definičního oboru, tj. zajímají nás limity v $\pm\infty$. Pro $k \rightarrow +\infty$ máme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 2^k = +\infty,$$

exponenciální růst převládá, takže globální maximum neexistuje (posloupnost je neomezená shora). Analogicky Pro $k \rightarrow -\infty$ máme

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} k^2 2^k = 0,$$

přitom $y_k \geq 0$ pro všechna k a $y_0 = 0$, tedy globální minimum je $y_0 = 0$.

- (iii) **Konvexnost/konkávnost:** Nalezneme posloupnost druhých diferencí posloupnosti y_k :

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(2^k(k^2 + 4k + 2)) = 2^k(k^2 + 8k + 12) = 2^k(k+2)(k+6).$$

Znaménko $\Delta^2 y_k$ opět určuje pouze výraz $(k+2)(k+6)$. Nulové body jsou $k = -6$ a $k = -2$. Posloupnost $\Delta^2 y_k$ je kladná mimo $\mathbb{Z} \setminus [-6, -2]_{\mathbb{Z}}$ a záporná na $[-5, -3]_{\mathbb{Z}}$, viz tabulka níže:

k	...	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	...
$(k+2)(k+6)$	...	+	0	-	-	-	0	+	...

Podle vět 4.17 a 4.18 tedy přímo platí

y_k je konvexní na $(-\infty, -6]_{\mathbb{Z}} \cup [-2, \infty)_{\mathbb{Z}}$, y_k je konkávní na $[-6, -2]_{\mathbb{Z}}$.

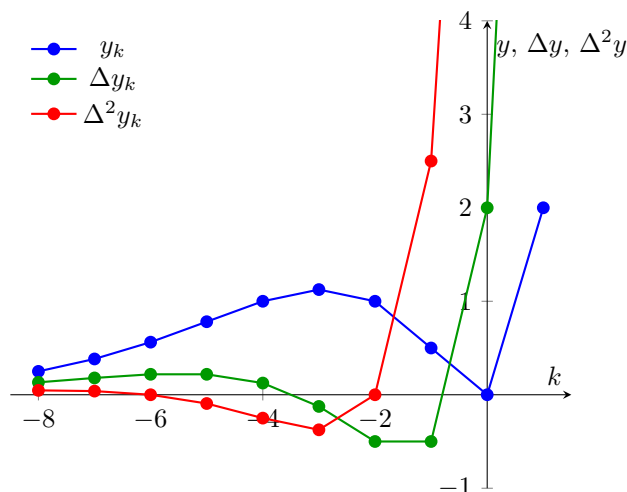
- (iv) **Inflexní body:** Inflexní body jsou právě ty body, kde se znaménko $\Delta^2 y_k$ mění, tj. inflexní body nastávají v

$$k = -6 \text{ a } k = -2.$$

- (v) **Asymptoty se směrnici:** Asymptota se směrnici $x_k = Ak + B$ existuje, jestliže $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} y_k/k = A$. Pro $k \rightarrow +\infty$ máme $y_k/k = k 2^k \rightarrow +\infty$ a tedy asymptota se směrnici v $+\infty$ neexistuje. Pro $k \rightarrow -\infty$ platí $y_k \rightarrow 0$ a $y_k/k \rightarrow 0$, takže asymptota se směrnici v $-\infty$ je

$$x_k = 0 \text{ pro } k \rightarrow -\infty.$$

- (vi) **Průběh posloupnosti:** Průběhy posloupností y_k (modrá barva), Δy_k (zelená barva) a $\Delta^2 y_k$ (červená barva) jsou znázorněny na obrázku níže.



4.6.2. Modus diskretních rozdělení pravděpodobnosti. V teorii pravděpodobnosti, konkrétně diskretních náhodných veličin vystupuje mnoho náhodných rozdělení, mezi nejznámější patří například *Poissonovo rozdělení* nebo *Binomické rozdělení*, resp. *Bernoulliho schéma*.

Jeden z mnoha důležitých parametrů, které nás mohou zajímat u těchto (a dalších) rozdělení je *modus*. Modus je nejpravděpodobnější hodnota náhodného rozdělení. Kdybychom vykreslili dané rozdělení do grafu s nějakými parametry, tak modus bude extrém (globální maximum) daného rozdělení.

Příklad 4.26 (Modus diskretního Poissonova rozdělení). Uvažujme diskretní Poissonovo rozdělení

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{kde } \lambda > 0.$$

Nalezněte modus Poissonova rozdělení pro obecné $\lambda > 0$.

Máme posloupnost

$$y_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{kde } \lambda > 0.$$

Definiční obor je $\mathbb{N}_0$. Za využití Stirlingovy formule dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0.$$

Posloupnost se s rostoucím k blíží k nule a navíc nabývá v $k = 0$ hodnoty $e^{-\lambda}$, což je nějaké „malé“ číslo. Obor hodnot je mezi 0 a naším hledaným extrémem.

Intervaly monotonie nalezneme pomocí věty 4.1. Určíme první diferenci posloupnosti y_k .

$$\Delta y_k = \Delta \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k+1)!} (\lambda - 1 - k).$$

Hledáme, kde tato posloupnost mění znaménko na diskretním intervalu $\mathbb{N}_0$.

Řešíme tedy rovnici

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k+1)!} (\lambda - 1 - k) = 0.$$

Řešením této rovnice je $k = \lambda - 1$ a podle věty 4.1 je posloupnost y_k rostoucí na $[0, \lambda - 1]_{\mathbb{Z}}$ a klesající na $[\lambda - 1, +\infty]_{\mathbb{Z}}$.

Vzhledem k tomu, že $\Delta y_{\lambda-1} = 0$, musí platit $y_{\lambda-1} = y_{\lambda}$. Odtud plyne, že na intervalu $[\lambda - 1, \lambda]_{\mathbb{Z}}$ se bude nacházet rozšířený lokální extrém. Nikde jinde posloupnost prvních diferencí znaménko nemění a ani není rovna nule. Jedná se tak o jediný extrém a dokonce se jedná o globální extrém, protože krajní body jsme již prověřili.

Když se podíváme na hodnoty, kterých posloupnost nabývá v bodech $\lambda - 2$ a $\lambda + 1$, zjistíme, že se jedná o rozšířené globální maximum.

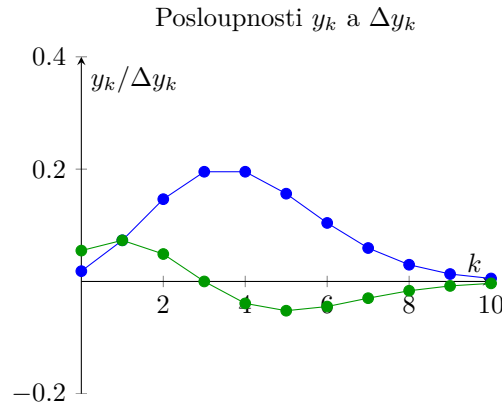
V praxi samozřejmě záleží na tom, zda je λ celé číslo nebo třeba číslo reálné, nicméně tento problém lze lehce vyřešit tak, že prověříme nejbližší body (nejbližší celá čísla) na množině $\mathbb{Z}$, stejně tak bychom měli porovnat body λ a $\lambda - 1$ mezi sebou.

Odborná literatura uvádí, že modus Poissonova rozdělení platí

$$\lambda - 1 \leq \text{modus} \leq \lambda.$$

Vidíme, že naše výsledky se s literaturou shodují.

Pro ilustraci uvádíme obrázek, který znázorňuje průběh posloupností y_k (modrá barva) a Δy_k (zelená barva), pro $\lambda = 4$. Na základě nalezeného globálního maxima by se měl modus diskrétního Poissonova rozdělení nacházet na intervalu $[\lambda - 1, \lambda]_{\mathbb{Z}}$, tj. v bodech $k = 3$ a $k = 4$, což odpovídá obrázku níže.



Příklad 4.27 (Modus diskrétního Binomického rozdělení). Uvažujme Binomické rozdělení s předpisem

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}, \quad p \in (0, 1).$$

Nalezněte modus Binomického rozdělení pro libovolné parametry p, n .

Uvažujme, že je posloupnost definovaná na $\mathbb{N}_0$, protože přesně takový interval nás v teorii pravděpodobnosti zajímá.

Máme posloupnost

$$y_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Definiční obor je $\mathbb{N}_0$. Posloupnost y_k v bodě $k = 0$ nabývá hodnoty $y_0 = (1-p)^n$, naopak pro rostoucí k platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0.$$

Tento výsledek plyne z úvahy, že pro n pevné a $k \rightarrow +\infty$ se binomické číslo blíží nule, jelikož $\binom{n}{k} = 0$ pro $k > n$. Takže od jistého indexu k takového, že $k > n$ bude y_k triviálně nula a tedy $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0$.

Nyní nalezneme posloupnost prvních diferencí Δy_k a podle věty 4.1 rozhodneme o monotonii y_k a nalezneme lokální extrémy.

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \Delta \left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Naším cílem je nalézt zobecněné nulové body této posloupnosti, resp. nalézt taková k ve kterých bude posloupnost Δy_k rovna nule, resp. bude měnit znaménko. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} p^k (1-p)^{n-k} = 0 \\ &= n!(n-k) p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - n!(k+1) p^k (1-p)^{n-k} = 0 \\ &= (n-k)p - (k+1)(1-p) = 0 \\ &= p(n+1) - 1 = k. \end{aligned}$$

Posloupnost prvních diferencí má nulový bod v $k = p(n+1) - 1$, tím pádem musí platit, že $y_{p(n+1)-1} = y_{p(n+1)}$ a podle věty 4.1 je posloupnost y_k rostoucí na $[0, p(n+1) - 1]_{\mathbb{Z}}$ a klesající na $[p(n+1), +\infty)_{\mathbb{Z}}$. Není těžké ověřit, že v bodech $p(n+1) - 2$ a $p(n+1) + 1$ bude mít posloupnost y_k menší hodnoty než na $[p(n+1) - 1, p(n+1)]_{\mathbb{Z}}$.

Vidíme, že posloupnost y_k bude mít rozšířený lokální extrém na intervalu $[p(n+1) - 1, p(n+1)]_{\mathbb{Z}}$. Žádné další zobecněné nulové body posloupnosti Δy_k nemá a tedy se bude jednat dokonce o rozšířené globální maximum. Modus se bude nacházet na intervalu $[p(n+1) - 1, p(n+1)]_{\mathbb{Z}}$.

Literatura uvádí, že pro modus binomického rozdělení platí

$$p(n+1) - 1 \leq \text{modus} \leq p(n+1).$$

Vidíme, že naše výsledky se shodují s literaturou.

5. ZÁVĚR

V článku byla vybudována systematická teorie konečných diferencí a jejich využití při kvalitativní analýze posloupností ve smyslu diskrétní analogie k diferenciálnímu počtu. Byly odvozeny diskrétní verze základních vět o střední hodnotě a formulovány nutné a postačující podmínky pro existenci ostrých i rozšířených lokálních a globálních extrémů posloupností.

Zvláštní pozornost byla věnována prvním, druhým a vyšším diferencím, které se ukazují jako přirozený nástroj pro popis lokální charakteristiky posloupností a umožňují efektivní klasifikaci (rozšířených) lokálních extrémů, analogicky k derivacím ve spojitém diferenciálním počtu.

Prezentovaný aparát nachází přímé uplatnění při studiu posloupností, diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, diferenčních rovnic, diskrétních dynamických systémů a numerických diskretizačních metod. Možným směrem dalšího výzkumu je rozšíření výsledků na vícerozměrné posloupnosti, systémy diferenčních rovnic a diskrétní variační problémy. Dalším zajímavým otevřeným problémem jsou formulace a důkazy obecnějších diskretizací vět o střední hodnotě, jako například Cauchyova věta o střední hodnotě, Pompeiova věta o střední hodnotě, Flettova věta o střední hodnotě a další.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Janu Čermákovi CSc., doc. Ing. Ludkovi Nechvátalovi Ph.D. a doc. Ing. Jiřímu Šremrovi Ph.D. za pomoc, mnohé rady, které mi poskytli. Dále bych jim rád poděkoval za čas, který mi věnovali a za připomínky a odborné rady, které vedly ke zkvalitnění článku.

REFERENCE

- [1] R. P. Agarwal: *Difference Equations and Inequalities Theory, Methods, and Applications*, 2nd Edition, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [2] W. G. Kelly, A. C. Peterson: *Difference Equations, An introduction with Applications*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, CA, 2001.
- [3] E. Pelantová, J. Vondráčková: *Matematická analýza 1*, 3. Vydání, ČVUT, Praha, CA, 2018.

Jan Prokop, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: janprokop@post.cz

