

VYBRANÉ PŘÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ SÚŤAŽE MATHING

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

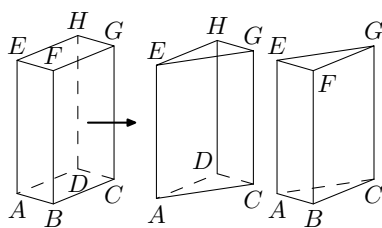
Ústav matematiky na FSI VUT v Brně každoročně organizuje matematickou súťaž MATHING pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku, s pôvodným názvom Internetová matematická olympiáda. V novembri v roku 2024 prebehol už jej sedemnásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach mathing.fme.vutbr.cz je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je siedmy v poradí na túto tému. Pozrieme sa v ňom bližšie na geometrickú úlohu o rovnobežnostech.

Príklad sa objavil v súťaži v roku 2023 pod číslom 7. Očakávali sme, že bude patriť k náročnejším, ale nenapadlo nás, že táto priestorová geometrická úloha sa zaradí medzi výrazne najnáročnejšie príklady za posledné roky, z pohľadu bodového ohodnotenia. Len dva tímy poslali správne riešenie aj s postupom.

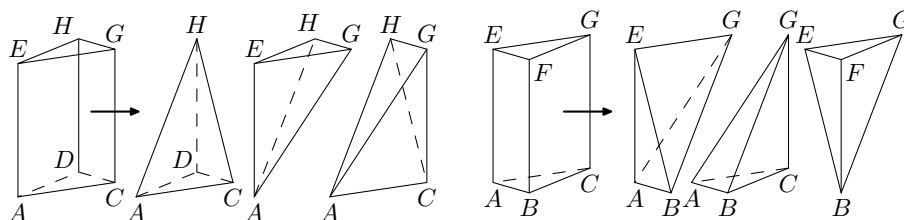
Tu je zadanie:

Príklad 1. Máme kvádr $ABCDEFGH$ s dĺžkami hran $|AB| = 1$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|AE| = 3$ cm. Tento kvádr rozdelíme rovinou určenou vrcholmi A, C, E, G najprve na dva hranoly $ACDEGH$ a $ABCEFG$, viz obrázek 1.



Obrázek 1. Obrázek k zadání příkladu 1, rozdělení na hranoly $ACDEGH$ a $ABCEFG$.

Každý z těchto hranolů dále rozdělíme na tři čtyřstěny. Z hranolu $ACDEGH$ vytvoříme trojici čtyřstěnů $ACDH$, $AEGH$, $ACGH$, z hranolu $ABCEFG$ obdobně vytvoříme trojici čtyřstěnů $ABEG$, $ABCG$, $BEFG$. Rozdělení hranolů je znázorněno na obrázku 2.



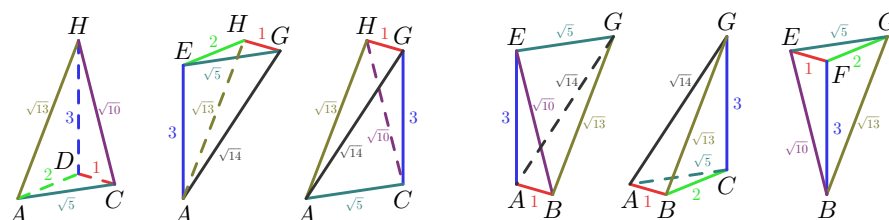
Obrázek 2. Obrázek k zadání příkladu 1, rozdělení hranolů na čtyřstěny.

Z těchto čtyřstěnů lze složit různé rovnoběžnostěny se stejným objemem, jako měl původní kvádr, pokud použijeme všech 6 čtyřstěnů.

Úkol: Nalezněte rovnoběžnostěn, složený ze všech 6 čtyřstěnů, s největším povrchem. Tento povrch určete.

Kompletné riešenie je možné nájsť na stránkach súťaže. Uvediem tu aspoň jeho náčrt:

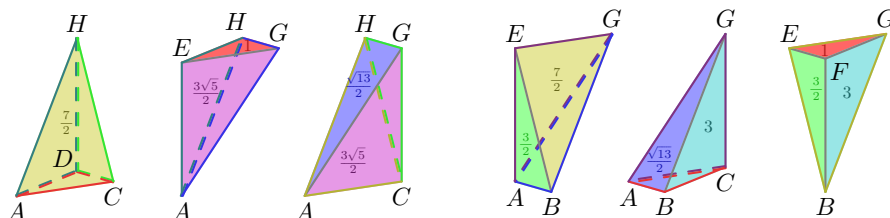
Keď bližšie preskúmame všetky hrany vzniknutých 6 štvorstenov, zistíme, že majú len 7 rôznych dĺžok. Označme ich pre prehľadnosť písmenami r, g, b, c, m, y, k (podľa obvyklého označenia farieb, ktoré majú tieto hrany na obrázku 3). Sú to dĺžky hrán pôvodného kvádra: $r = 1$ cm, $g = 2$ cm, $b = 3$ cm, uhlopriečok jeho stien: $c = \sqrt{5}$ cm, $m = \sqrt{10}$ cm, $y = \sqrt{13}$ cm a jeho telesovej uhlopriečky: $k = \sqrt{14}$ cm.



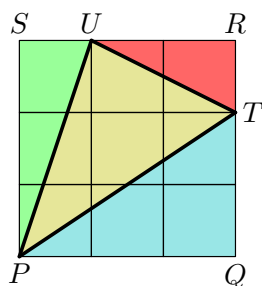
Obrázek 3. Dĺžky hrán štvorstenov. Hrany rovnakej dĺžky sú vyznačené rovnakou farbou.

Teraz sa pozrime na steny vzniknutých štvorstenov. Vidíme, že sa medzi nimi objavuje len 6 rôznych trojuholníkov a k nim zrkadlovo prevrátené. Všetky tieto trojuholníky, okrem jedného, sú pravouhlé, a je jednoduché určiť ich obsahy. Sú vyznačené na obrázku 4.

U nepravouhlého trojuholníka, (na obr. 4 je to trojuholník BEG a ACH vyznačený žltou farbou), tiež nie je zložité určenie jeho obsahu: jeho strany sú prepo-nami pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami 1 cm a 2 cm, 1 cm a 3 cm, 2 cm a 3 cm, a môžeme si pomôcť napríklad obrázkom 5.



Obrázek 4. Obsahy stien štvorstenov. Steny s rovnakým obsahom sú vyznačené rovnakou farbou. Farby čiar znázorňujú farbu zakrytých stien.



Obrázek 5. Pomocný štvorec $PQRS$ má dĺžku strany 3 cm a má obsah 9 cm^2 , $\triangle PQT$ má obsah 3 cm^2 , $\triangle TRU$ má obsah 1 cm^2 , $\triangle PUS$ má obsah $\frac{3}{2} \text{ cm}^2$. Z toho plynie, že obsah $\triangle PTU$ je $9 - 3 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \text{ cm}^2$.

Označme obsahy týchto 6 typov trojuholníkov, zoradené od najmenšieho po najväčší, veľkými písmenami R, G, B, C, M, Y . Sú to

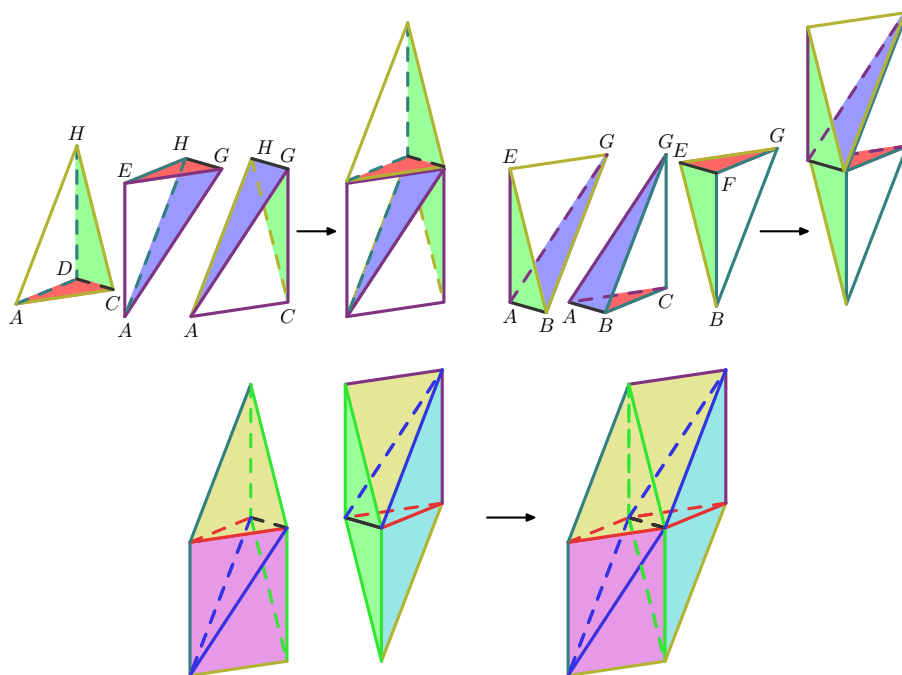
$$R = 1 \text{ cm}^2, G = 1,5 \text{ cm}^2, B = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8 \text{ cm}^2,$$

$$C = 3 \text{ cm}^2, M = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3,4 \text{ cm}^2, Y = 3,5 \text{ cm}^2.$$

Teraz využijeme skutočnosť, že každý z možných rovnobežnostenov, ktorý dostaneme poskladaním z týchto 6 štvorstenov, bude mať, rovnako ako pôvodný kváder, 3 páry rovnobežníkových stien. Každá stena bude tvorená dvojicou zhodných trojuholníkov - stien niektorých zo štvorstenov, a k nej protíahlá stena bude tvorená dvojicou rovnakých trojuholníkov (zrkadlovo prevrátených). Na steny sa teda využijú len 3 rôzne typy trojuholníkov z celkových 6. Ak chceme dosiahnuť maximálny povrch, vezmeme tie tri trojuholníky, ktoré majú najväčší obsah, teda tie s obsahmi C, M, Y . Povrch rovnobežnostena je štvornásobok súčtu ich obsahov, to je

$$4(C + M + Y) = 4 \left(3 + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{7}{2} \right) = 26 + 6\sqrt{5} \text{ cm}^2 \approx 39 \text{ cm}^2.$$

Teraz už len stačí takýto rovnobežnosten poskladať. Toto vyžaduje trochu priestorovej predstavivosti, je tiež možné si vyrobiť model. Postupujeme tak, že prikľadáme k sebe tie steny, ktoré majú najmenší obsah, teda tie s obsahmi $2R$, $2G$, $2B$. Postup skladania je znázornený na obrázku 6.



Obrázek 6. Postup skladania rovnobežnostena s najväčším povrchom. Steny s rovnakým obsahom sú vyznačené rovnakou farbou. Farby čiar znázorňujú farbu nevyplnených stien.



Na motívy tohto príkladu sme na našom Ústave matematiky vyrobili pomocou 3D tlače aj skladačku, ktorú dostalo desať najlepšie umiestnených tímov spolu s diplomom. Ku skladačke bol priložený leták s mierne pozmenenou úlohou. Okrem nájdenia rovnobežnostena s najväčším povrchom chceme nájsť aj všetky ostatné rovnobežnosteny, ktoré je možné poskladať daným spôsobom.

Príklad 2. Zistite, koľko rôznych rovnobežnostenov je možné poskladať zo štvorstenov $ACDH$, $AEGH$, $ACGH$, $ABEG$, $ABCG$, $BEFG$ (znázornených na obrázku 2), a ktorý z nich má najväčší povrch.

Riešenie nebolo priložené, uvediem ho teraz na tomto mieste.

Riešenie príkladu 2. Vieme už, že skladačku tvorí 6 štvorstenov, ktorých trojuholníkové steny majú spolu 6 rôznych obsahov, označili sme ich R, G, B, C, M, Y . Z toho vždy 3 sa použijú na steny vytvoreného rovnobežnostena. Maximálny možný počet možností je teda kombinačné číslo $\binom{6}{3} = 20$. Ak by sme sa však všetkých 20 pokúsili poskladať, v niektorých prípadoch by sa nám to nepodarilo.

Prečo? Pozrime sa teraz na to, kde sa v našom telese nachádzajú hrany tých 6 štvorstenov. Tieto hrany majú 7 rôznych dĺžok. Niektoré z nich sú súčasne hranami rovnobežnostena. Tie majú 3 rôzne dĺžky. Ďalšie sú uhlopriečkami jeho stien, to sú ďalšie 3 rôzne dĺžky. A niektoré sú vždy jeho telesovou uhlopriečkou. Tie majú poslednú, siedmu dĺžku. A tie nie sú obsiahnuté v žiadnom z troch typov trojuholníkov, tvoriacich steny.

Vypíšme si prehľad, ktorý trojuholník má ktoré hrany:

$R : r, g, c \quad G : r, b, m \quad B : r, y, k \quad C : g, b, y \quad M : b, c, k \quad Y : c, m, y$.

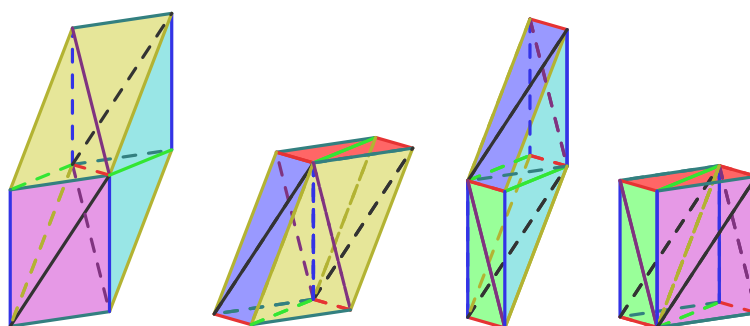
A teraz ku každej hrane napíšeme tie trojuholníky, ktoré ju neobsahujú, a teda ktoré jediné by mohli tvoriť steny rovnobežnostena, ak by takáto hrana bola jeho telesovou uhlopriečkou:

$r : C, M, Y \quad b : R, B, Y \quad c : G, B, C \quad y : R, G, M$

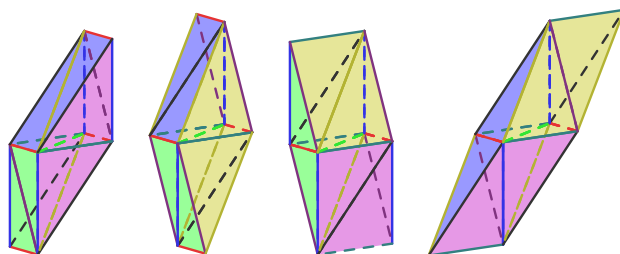
$g : G, B, M, Y \quad m : R, B, C, M \quad k : R, G, C, Y$.

V prvom riadku sú tie hrany, ku ktorým existujú len 3 vhodné trojuholníky, a teda môže vzniknúť maximálne jeden rovnobežnosten s takouto telesovou uhlopriečkou. V druhom riadku sú tie, ku ktorým existujú 4 vhodné trojuholníky, a teda môžu vzniknúť maximálne 4 rovnobežnosteny s takouto telesovou uhlopriečkou. Spolu je teda maximálne $4 + 3 \cdot 4 = 16$ možných rovnobežnostenov.

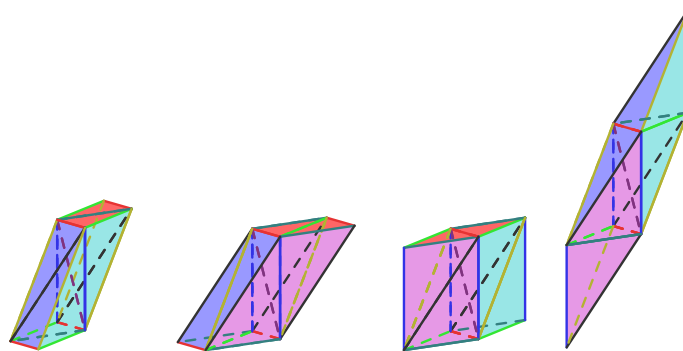
Všetky tieto rovnobežnosteny sa už skutočne dajú vytvoriť, čo je ľahké overiť ich skonštruovaním. Sú znázornené na obrázkoch 7–10, steny s rovnakým obsahom sú vyznačené rovnakou farbou a farby čiar znázorňujú dĺžku hrán.



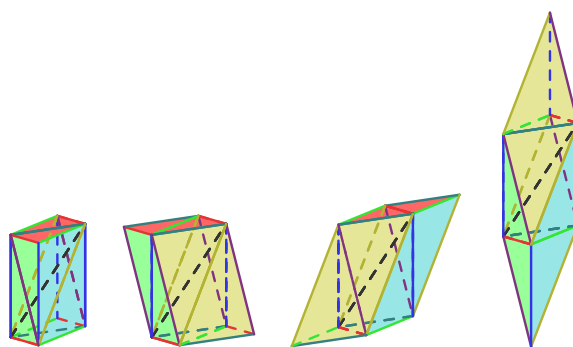
Obrázek 7. Rovnobežnosteny $rCMY, bRBY, cGBC, yRGM$.



Obrázek 8. Rovnobežnosteny $gGBM$, $gGBY$, $gGMY$, $gBMY$.



Obrázek 9. Rovnobežnosteny $mRBC$, $mRBM$, $mRCM$, $mBCM$.



Obrázek 10. Rovnobežnosteny $kRGC$, $kRGY$, $kRCY$, $kGCY$.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení
technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz