

FLOQUETOVA TEORIE PRO LINEÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S PERIODICKÝMI KOEFCIENTY II

JIRÍ ŠREMR

ABSTRAKT. Článek je pokračováním příspěvku [3] publikovaném v tomto časopise v roce 2022 a má za cíl ukázat, jak je možné použít Floquetovu teorii v důkazech obecných kritérií Ljapunovské stability a nestability lineární diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty.

Uvažujeme diferenciální rovnici

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0, \tag{L}$$

v níž jsou koeficienty $p, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokálně lebesgueovsky integrovatelné ω -periodické funkce. Řešením rovnice (L) rozumíme funkci $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je absolutně spojitá spolu se svou derivací na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$ a která po dosazení splňuje rovnost (L) skoro všude v $\mathbb{R}$. Čtenáři, kteří nejsou zvyklí pracovat s rovnicemi s integrovatelnými koeficienty, mohou předpokládat, že koeficienty g a p jsou spojitě a řešení uvažovat ve třídě funkcí se spojitou 2. derivací.

V první části tohoto článku jsme ukázali alternativní možnost jak vybudovat základy Floquetovy teorie pro rovnici (L) s periodickými koeficienty. Inspirovali jsme se přístupem N. Sansoneho (viz např. [1, Hlava VI, §1]), definovali pojem Floquetova multiplikátoru a ukázali, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (L), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V tomto článku připomeneme koncept Ljapunovské stability lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu a ukážeme, jak je možné použít Floquetovu teorii v důkazech obecných kritérií stability a nestability.

1. LJAPUNOVSKÁ STABILITA

Pojem Ljapunovské stability obvykle zavádíme pro řešení soustav diferenciálních rovnic a poté odvodíme důsledky pro diferenciální rovnice vyšších řádů. Neboť se v tomto příspěvku budeme věnovat výhradně rovnici (L), připomeneme definice Ljapunovské stability formulované přímo pro řešení rovnice (L).

Poznamenejme, že zajímáme-li se o stabilitu řešení v okolí $+\infty$, stačí uvažovat rovnici (L) na nějakém okolí $+\infty$, například na poloose $[0, +\infty)$.

2020 MSC. Primární 34A30; Sekundární 34D05, 34C25.

Klíčová slova. Diferenciální rovnice 2. řádu, Floquetova teorie, Ljapunovská stabilita.

Definice 1.1. Řešení $x_0: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ rovnice (L) se nazývá:

- (1) **(ljapunovsky) stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a $t_0 \geq 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že libovolné řešení x rovnice (L) vyhovující podmínce

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| + |x'(t_0) - x'_0(t_0)| < \delta \quad (1.1)$$

splňuje nerovnost

$$|x(t) - x_0(t)| + |x'(t) - x'_0(t)| < \varepsilon \quad \text{pro } t \geq t_0;$$

- (2) **nestabilní**, jestliže není stabilní;
 (3) **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a pro každé $t_0 \geq 0$ existuje $\delta = \delta(t_0) > 0$ takové, že libovolné řešení x rovnice (L) vyhovující podmínce (1.1) splňuje

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x(t) - x_0(t)| + |x'(t) - x'_0(t)|) = 0;$$

- (4) **exponenciálně stabilní**, jestliže existuje $\eta > 0$ taková, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že libovolné řešení x rovnice (L) vyhovující v nějakém $t_0 \geq 0$ podmínce (1.1) splňuje nerovnost

$$|x(t) - x_0(t)| + |x'(t) - x'_0(t)| < \varepsilon e^{-\eta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

Poznámka 1.2. V literatuře lze najít na první pohled různé definice exponenciální stability řešení, v případě lineárních rovnic (i soustav) však tyto definice určují stejnou vlastnost.

Všimněme si, že z asymptotické stability řešení x_0 rovnice (L) okamžitě plyne jeho stabilita a z exponenciální stability jeho asymptotická stabilita. Opačná tvrzení však neplatí.

Jelikož je rovnice (L) lineární, lehce lze dokázat, že řešení x_0 rovnice (L) je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) právě tehdy, když je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) její nulové řešení. Odtud okamžitě plyne, že všechna řešení rovnice (L) jsou z pohledu stability „stejněho typu“, a proto obvykle mluvíme o stabilitě lineární rovnice místo o stabilitě jejích řešení.

Pro jednotlivé typy stability jsou k dispozici následující nutné a postačující podmínky, které nám dovolí rozhodnout o stabilitě rovnice (L), známe-li chování jejího fundamentálního systému řešení.

Tvrzení 1.3. Rovnice (L) je:

- (a) *stabilní právě tehdy, když každé její řešení x splňuje*

$$\sup \{ |x(t)| + |x'(t)| : t \geq 0 \} < +\infty. \quad (1.2)$$

- (b) *asymptoticky stabilní právě tehdy, když každé její řešení x splňuje*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0. \quad (1.3)$$

- (c) *exponenciálně stabilní právě tehdy, když existují čísla $\beta > 0$ a $N > 0$ taková, že každé řešení x rovnice (L) splňuje*

$$|x(t)| + |x'(t)| \leq N \left(|x(t_0)| + |x'(t_0)| \right) e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0 \geq 0.$$

Na závěr této kapitoly připomeneme, jak lze jednoduše rozhodnout o stabilitě diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$x'' + g_0 x' + p_0 x = 0, \quad (1.4)$$

kde $p_0, g_0 \in \mathbb{R}$. Jedná se zřejmě o speciální případ rovnice (L), přičemž její koeficienty jsou periodické s libovolnou periodou $\omega > 0$.

Tvrzení 1.4. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou kořeny charakteristické rovnice*

$$\lambda^2 + g_0 \lambda + p_0 = 0 \quad (1.5)$$

odpovídající diferenciální rovnici (1.4). Potom platí:

- (1) *Jestliže $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ a $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$, pak je rovnice (1.4) exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*
- (2) *Jestliže $\operatorname{Re} \lambda_1 \leq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 \leq 0$, existuje kořen s nulovou reálnou částí a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchý, pak je rovnice (1.4) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*
- (3) *Jestliže $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ nebo $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ pro nějaké $k \in \{1, 2\}$, pak je rovnice (1.4) nestabilní.*

V kapitole 3 dokážeme podobná kritéria pro rovnici (L) s periodickými koeficienty, známe-li oba její Floquetovy multiplikátory.

2. FLOQUETOVY MULTIPLIKÁTORY ROVNICE (L)

Pro pohodlí čtenáře připomeňme velmi stručně základní fakta, která jsou podrobně vysvětlena v příspěvku [3] a která budeme potřebovat k důkazu věty 3.1.

Otázka existence netriviálního řešení rovnice (L) s ω -periodickými koeficienty splňujícího podmínku

$$x(t + \omega) = \varrho x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

vede k následující definici a tvrzení.

Definice 2.1. Kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^2 - (u_1(\omega) + u_2'(\omega))\varrho + e^{-\int_0^\omega g(s)ds} = 0, \quad (2.2)$$

kde u_1 a u_2 jsou řešení rovnice (L) splňující počáteční podmínky

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0 \quad \text{a} \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1,$$

nazýváme **Floquetovy multiplikátory** diferenciální rovnice (L).

Tvrzení 2.2. *Rovnice (L) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení splňující podmínku (2.1) právě tehdy, když je ϱ Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice (L).*

Definice 2.3. Necht $\varrho \in \mathbb{C}$ je Floquetův multiplikátor rovnice (L) s ω -periodickými koeficienty a necht $\varrho = |\varrho| e^{i\vartheta}$, kde $\vartheta \in (-\pi, \pi]$. Potom číslo

$$\alpha = \frac{1}{\omega} \ln |\varrho| + \frac{\vartheta}{\omega} i \quad (2.3)$$

nazýváme **Floquetův charakteristický exponent** rovnice (L).

Poznámka 2.4. V [3, Poznámka 1.7] jsme ukázali, že Floquetovy multiplikátory rovnice (L) jsou vlastní čísla matice monodromie $Y(\omega)$, kde Y je fundamentální matice soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -g(t) \end{pmatrix} y \quad (2.4)$$

splňující $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. To znamená, že Floquetovy multiplikátory rovnice (L) zavedené v definici 2.1 souhlasí s Floquetovými multiplikátory odpovídající soustavy (2.4)¹. Z Floquetovy teorie také vyplývá, že Floquetovy exponenty soustavy (2.4) jsou tvaru (2.3) až na případný aditivní člen $\frac{2k\pi i}{T}$, v němž $k \in \mathbb{Z}$.

V první části tohoto článku [3] jsme dokázali, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (L), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V následující větě označme $AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ množinu funkcí, které jsou absolutně spojitě spolu se svou derivací na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 2.5. *Necht ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (L). Pak platí:*

- (1) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$, pak $\varrho_1 \varrho_2 > 0$ a existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$).

- (2) *Jestliže $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující buď*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

nebo

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} [t\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

- (3) *Jestliže $\varrho_{1,2} = \varrho_0 e^{\pm i\vartheta}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

¹Floquetovu teorii pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s periodickou maticovou funkcí je možné najít například v monografii [4].

$$a \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce.

3. KRITÉRIA STABILITY/NESTABILITY V ŘEČI FLOQUETOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ

V této části dokážeme kritéria stability/nestability rovnice (L) v řeči jejích Floquetových multiplikátorů. Lze je dokázat různými způsoby (viz závěrečné poznámky v kapitole 4), my použijeme k důkazu tvrzení 2.5 o možné reprezentaci lineárně nezávislých řešení rovnice (L) a obecná kritéria stability formulovaná v tvrzení 1.3. V důkazech není potřeba žádný složitý matematický aparát, čtenář vystačí se základními znalostmi matematické analýzy a s vlastnostmi lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v rozsahu běžně probíraném v základních kurzech vysokoškolské matematiky.

Věta 3.1. *Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C}$ jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (L) s ω -periodickými koeficienty. Potom platí:*

- (1) *Jestliže $|\varrho_1| < 1$ a $|\varrho_2| < 1$, pak je rovnice (L) exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*
- (2) *Jestliže $|\varrho_k| > 1$ pro nějaké $k \in \{1, 2\}$, pak je rovnice (L) nestabilní.*
- (3) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $|\varrho_1| = 1$ a $|\varrho_2| < 1$, pak je rovnice (L) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*
- (4) *Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. Pak je rovnice (L) stabilní právě tehdy, když jsou všechna její řešení periodická. Je-li v tomto případě rovnice (L) stabilní, není stabilní asymptoticky.*
- (5) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$, pak je rovnice (L) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

Poznámka 3.2. Je-li ϱ Floquetův multiplikátor rovnice (L) a α k němu odpovídající Floquetův exponent, pak ze vztahu (2.3) okamžitě vyplývá, že

$$\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{\omega} \ln |\varrho|.$$

Tudíž $\operatorname{Re} \alpha < 0$ (resp. $\operatorname{Re} \alpha = 0$, resp. $\operatorname{Re} \alpha > 0$) právě tehdy, když $|\varrho| < 1$ (resp. $|\varrho| = 1$, resp. $|\varrho| > 1$).

Kritéria stability formulovaná ve větě 3.1 lze tedy jednoduše přeformulovat v řeči reálných částí Floquetových exponentů rovnice (L), které hrají v otázce její stability podobnou roli jako kořeny charakteristické rovnice (1.5) příslušné diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (1.4).

Důkaz věty 3.1. Pro libovolné řešení x rovnice (L) označíme

$$\|x(t)\| = |x(t)| + |x'(t)| \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení (1): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $|\varrho_1| < 1$, $|\varrho_2| < 1$ a nechť x je libovolné řešení rovnice (L), $t_0 \geq 0$ je libovolný bod.

Všimněme si, že je-li x_1, x_2 fundamentální systém řešení rovnice (L), pak

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

kde c_1, c_2 splňují

$$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0), \quad x'(t_0) = c_1 x'_1(t_0) + c_2 x'_2(t_0),$$

tj. c_1, c_2 jsou dány vztahy

$$c_1 = \frac{x(t_0)x'_2(t_0) - x'(t_0)x_2(t_0)}{W[x_1, x_2](t_0)}, \quad c_2 = -\frac{x(t_0)x'_1(t_0) - x'(t_0)x_1(t_0)}{W[x_1, x_2](t_0)}. \quad (3.2)$$

Připomeňme, že $W[x_1, x_2]$ značí wronskián řešení x_1, x_2 , který je definován vztahem $W[x_1, x_2](t) := x_1(t)x'_2(t) - x'_1(t)x_2(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

(A) Nejprve předpokládejme, že $\varrho_1 \neq \varrho_2$. Pak jsou ϱ_1, ϱ_2 buď obě reálná nebo komplexně sdružená, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty.

Případ (A1): $\varrho_1 \neq \varrho_2$ a $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$.

Z části (1) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru (2.5), kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC^1_{loc}(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Položme

$$\beta_1 := -\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega}, \quad \beta_2 := -\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega}.$$

Derivací vztahů (2.5) dostaneme

$$\|x_k(t)\| = |x_k(t)| + |x'_k(t)| = e^{-\beta_k t} \left[|\varphi_k(t)| + |-\beta_k \varphi_k(t) + \varphi'_k(t)| \right]$$

pro $t \in \mathbb{R}$ a $k = 1, 2$. Funkce $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ jsou periodické, existuje proto konstanta $N_{A1} > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$\|x_k(t)\| \leq N_{A1} e^{-\beta_k t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2. \quad (3.3)$$

Z (2.5) navíc dostaneme

$$W[x_1, x_2](t) = \left[\varphi_1(t)(-\beta_2 \varphi_2(t) + \varphi'_2(t)) - (-\beta_1 \varphi_1(t) + \varphi'_1(t))\varphi_2(t) \right] e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Jelikož jsou řešení x_1, x_2 lineárně nezávislá, pro jejich wronskián platí $W[x_1, x_2](t) \neq 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, což spolu s periodičností funkcí $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ zaručí, že existuje konstanta $A_1 > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$|W[x_1, x_2](t)| \geq A_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Na druhé straně, konstanty c_1, c_2 dané vztahy (3.2) splňují

$$|c_{3-k}| = \frac{|x(t_0)x'_k(t_0) - x'(t_0)x_k(t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \leq \frac{\|x(t_0)\| \|x_k(t_0)\|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \quad \text{pro } k = 1, 2$$

a použitím odhadů (3.3) a (3.4) ve vztahu (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq |c_1| \|x_1(t)\| + |c_2| \|x_2(t)\| \\ &\leq \|x(t_0)\| \left[\frac{N_{A1} e^{-\beta_2 t_0}}{A_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t_0}} N_{A1} e^{-\beta_1 t} + \frac{N_{A1} e^{-\beta_1 t_0}}{A_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t_0}} N_{A1} e^{-\beta_2 t} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{N_{A1}^2}{A_1} \|x(t_0)\| \left[e^{-\beta_1(t-t_0)} + e^{-\beta_2(t-t_0)} \right] \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

To však znamená, že

$$\|x(t)\| \leq \frac{2N_{A1}^2}{A_1} \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0,$$

kde $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\} > 0$, což vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

Případ (A2): $\varrho_1 \neq \varrho_2$ a $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$.

Z části (3) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru (2.8) a (2.9), kde $\varrho_0 = |\varrho_1|$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce. Položme

$$\beta_3 := -\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega}.$$

Derivací vztahů (2.8), (2.9) a použitím periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ zjistíme, že existuje konstanta $N_{A2} > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$\|x_k(t)\| \leq N_{A2} e^{-\beta_3 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2. \quad (3.5)$$

Z (2.8) a (2.9) navíc dostaneme

$$W[x_1, x_2](t) = \left[\frac{\vartheta}{\omega} (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)) + \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t) \right] e^{-2\beta_3 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož jsou řešení x_1, x_2 lineárně nezávislá, jejich wronskián $W[x_1, x_2]$ je nenulový na $\mathbb{R}$, což spolu s periodičností funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ zaručí, že existuje konstanta $A_2 > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$|W[x_1, x_2](t)| \geq A_2 e^{-2\beta_3 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Nyní analogicky jako v předchozím případě ze vztahů (3.1), (3.2), (3.5) a (3.6) vyplývá

$$\|x(t)\| \leq \frac{2N_{A2}^2}{A_2} \|x(t_0)\| e^{-\beta_3(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0,$$

kde $\beta_3 > 0$, což vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

(B) Dále předpokládejme, že $\varrho_1 = \varrho_2$. Pak $\varrho_1, \varrho_1 \in \mathbb{R}$, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty, a z části (2) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující buď (2.6) nebo (2.7), kde $\varrho_0 = \varrho_1$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Položme

$$\beta_4 := -\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega}.$$

Případ (B1): $\varrho_1 = \varrho_2$ a x_1, x_2 jsou tvaru (2.6).

Analogickým způsobem jako v části (A1) dokážeme, že existují konstanty $N_{B1} > 0$ a $B_1 > 0$ nezávislé na řešení x a bodu t_0 takové, že

$$\|x(t)\| \leq \frac{2N_{B1}^2}{B_1} \|x(t_0)\| e^{-\beta_4(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0,$$

což vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

Případ (B2): $\varrho_1 = \varrho_2$ a x_1, x_2 jsou tvaru (2.7).

Pak

$$x'_1(t) = e^{-\beta_4 t} \psi_1(t), \quad x'_2(t) = e^{-\beta_4 t} [t\psi_1(t) + \psi_2(t)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

kde

$$\psi_1(t) := -\beta_4 \varphi_1(t) + \varphi'_1(t), \quad \psi_2(t) := -\beta_4 \varphi_2(t) + \varphi_1(t) + \varphi'_2(t). \quad (3.8)$$

Ze vztahů (3.1) a (3.2) dostaneme výrazy

$$x(t) = \frac{1}{W[x_1, x_2](t_0)} [W_1(t, t_0)x(t_0) + W_2(t, t_0)x'(t_0)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

a

$$x'(t) = \frac{1}{W[x_1, x_2](t_0)} [W_3(t, t_0)x(t_0) + W_4(t, t_0)x'(t_0)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

v nichž

$$W_1(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [\varphi_1(t)\psi_2(t_0) - \varphi_2(t)\psi_1(t_0) - (t-t_0)\varphi_1(t)\psi_1(t_0)],$$

$$W_2(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [(t-t_0)\varphi_1(t)\varphi_1(t_0) + \varphi_1(t_0)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(t_0)],$$

$$W_3(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [\psi_1(t)\psi_2(t_0) - \psi_1(t_0)\psi_2(t) - (t-t_0)\psi_1(t)\psi_1(t_0)],$$

$$W_4(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [(t-t_0)\varphi_1(t_0)\psi_1(t) + \varphi_1(t_0)\psi_2(t) - \varphi_2(t_0)\psi_1(t)].$$

Vzhledem k (3.8) a periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ odtud vyplývá, že existují konstanty $\tilde{N}_{B_2}^k > 0$ a $\hat{N}_{B_2}^k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, nezávislé na řešení x a bodu t_0 takové, že

$$|W_k(t, t_0)| \leq [\tilde{N}_{B_2}^k(t-t_0) + \hat{N}_{B_2}^k] e^{-\beta_4(t+t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.11)$$

Na druhé straně, z (2.7), (3.7) a (3.8) dostaneme

$$\begin{aligned} W[x_1, x_2](t) &= [\varphi_1(t)(t\psi_1(t) + \psi_2(t)) - \psi_1(t)(t\varphi_1(t) + \varphi_2(t))] e^{-2\beta_4 t} \\ &= [\varphi_1(t)\psi_2(t) - \varphi_2(t)\psi_1(t)] e^{-2\beta_4 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jelikož jsou řešení x_1, x_2 lineárně nezávislá, jejich wronskián $W[x_1, x_2]$ je nenulový na $\mathbb{R}$, což spolu s periodičností funkcí $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ zaručí, že existuje konstanta $B_2 > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$|W[x_1, x_2](t)| \geq B_2 e^{-2\beta_4 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Tudíž, použitím odhadů (3.11), (3.12) ve vztazích (3.9), (3.10) získáme

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= |x(t)| + |x'(t)| \\ &\leq |x(t_0)| \frac{|W_1(t, t_0)| + |W_3(t, t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} + |x'(t_0)| \frac{|W_2(t, t_0)| + |W_4(t, t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sum_{k=1}^4 |W_k(t, t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \|x(t_0)\| \leq \frac{[\tilde{N}_{B2}(t - t_0) + \hat{N}_{B2}] e^{-\beta_4(t+t_0)}}{B_2 e^{-2\beta_4 t_0}} \|x(t_0)\| \\
&= \left[\frac{\tilde{N}_{B2}}{B_2} (t - t_0) e^{-\beta_4(t-t_0)} + \frac{\hat{N}_{B2}}{B_2} e^{-\beta_4(t-t_0)} \right] \|x(t_0)\| \quad \text{pro } t \geq t_0,
\end{aligned}$$

kde $\tilde{N}_{B2} = \sum_{k=1}^4 \tilde{N}_{B2}^k$ a $\hat{N}_{B2} = \sum_{k=1}^4 \hat{N}_{B2}^k$. Nyní si ještě všimněme, že existuje $M > 0$ takové, že

$$z e^{-\beta_4 z} \leq M e^{-\frac{1}{2}\beta_4 z} \quad \text{pro } z \geq 0,$$

a proto dostáváme

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{\tilde{N}_{B2}M}{B_2} + \frac{\hat{N}_{B2}}{B_2} \right) \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\beta_4(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

where $\beta_4 > 0$. Tento odhad vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

Tvrzení (2): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $|\varrho_1| > 1$. Zřejmě buď $\varrho_1 \in \mathbb{R}$ nebo $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(A) Nejprve předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{R}$. Z částí (1) a (2) tvrzení 2.5 vyplývá, že má rovnice (L) netriviální řešení x_1 splňující

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} \varphi_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ je 2ω -periodická funkce. Existuje tedy bod $t^* \in \mathbb{R}$ takový, že $\varphi_1(t^*) \neq 0$. Pak

$$x_1(t^* + n2\omega) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} (t^* + n2\omega)} \varphi_1(t^* + n2\omega) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} (t^* + n2\omega)} \varphi_1(t^*) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a proto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_1(t^* + n2\omega)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_1(t^*)| e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} (t^* + n2\omega)} = +\infty,$$

neboť $|\varrho_1| > 1$. Odtud dostáváme

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (|x_1(t)| + |x_1'(t)|) \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t)| = +\infty,$$

což vzhledem k tvrzení 1.3(a) zaručí, že je rovnice (L) nestabilní.

(B) Nyní předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$, neboť jsou ϱ_1, ϱ_2 řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty, a z části (3) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru (2.8) a (2.9), kde $\varrho_0 = |\varrho_1|$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce. Příímým výpočtem lze jednoduše ověřit, že

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = e^{2 \frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Jelikož jsou x_1, x_2 lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (L), funkce x_1, x_2 nemohou mít žádný společný nulový bod. To však znamená, že $\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) > 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, což vzhledem k periodičnosti funkcí φ_1, φ_2 zaručí, že

$$m := \min \{ \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) : t \in \mathbb{R} \} > 0.$$

Ze vztahu (3.13) proto dostáváme

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} m e^{2 \frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} = +\infty,$$

neboť $|\varrho_1| > 1$. Odtud vyplývá, že

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t)| = +\infty, \quad \text{nebo} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_2(t)| = +\infty,$$

což vzhledem k tvrzení 1.3(a) zaručí, že je rovnice (L) nestabilní.

Tvrzení (3): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $|\varrho_1| = 1$ a $|\varrho_2| < 1$. Z části (1) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Derivací těchto vztahů získáme

$$x_1'(t) = \varphi_1'(t), \quad x_2'(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} t} \left[\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} \varphi_2(t) + \varphi_2'(t) \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a vzhledem k předpokladu $|\varrho_2| < 1$ a periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ odtud dostáváme

$$\sup \{ |x_k(t)| + |x_k'(t)| : t \geq 0 \} < +\infty \quad \text{pro } k = 1, 2.$$

Jelikož je každé řešení rovnice (L) lineární kombinací fundamentálního systému řešení x_1, x_2 , z tvrzení 1.3(a) vyplývá, že je rovnice (L) stabilní. Netriviální řešení x_1 rovnice (L) je však periodické, a proto užitím tvrzení 1.3(b) zjistíme, že rovnice (L) není asymptoticky stabilní.

Tvrzení (4): Necht Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. Pak $\varrho_1 = \varrho_2$, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2).

(A) Nejprve předpokládejme, že je každé řešení rovnice (L) periodické. Libovolné netriviální řešení x rovnice (L) pak splňuje podmínku (1.2) (jeho derivace je totiž také periodická funkce), avšak nesplňuje podmínku (1.3). Z tvrzení 1.3 tak vyplývá, že je rovnice (L) stabilní, ale není asymptoticky stabilní.

(B) Nyní předpokládejme, že je rovnice (L) stabilní, a připuštěme, že má řešení, které není periodické. Pak z části (2) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = t\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Je zřejmé, že existuje $t^* \geq 0$ takové, že $\varphi_1(t^*) \neq 0$. Z (3.14) pak dostáváme

$$x_2(t^* + n2\omega) = (t^* + n2\omega)\varphi_1(t^* + n2\omega) + \varphi_2(t^* + n2\omega) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} |x_2(t^* + n2\omega)| &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} |(t^* + n2\omega)\varphi_1(t^*) + \varphi_2(t^*)| \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[(t^* + n2\omega)|\varphi_1(t^*)| - |\varphi_2(t^*)| \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Řešení x_2 není tedy ohraničené na $[0, +\infty)$, což je vzhledem k tvrzení 1.3(a) ve sporu se stabilitou rovnice (L).

Tvrzení (5): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. Pak $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty, a z části (3) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru

$$x_1(t) = \varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

$$x_2(t) = \varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Derivací vztahů (3.15), (3.16) a použitím periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ zjistíme, že jsou řešení x_1, x_2 ohraničená na $\mathbb{R}$ spolu se svými derivacemi. Jelikož je každé řešení rovnice (L) lineární kombinací fundamentálního systému řešení x_1, x_2 , z tvrzení 1.3 (a) vyplývá, že je rovnice (L) stabilní.

Na druhé straně, ze vztahů (3.15), (3.16) dostaneme

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Je-li

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0,$$

pak z (3.17) získáme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)) = 0,$$

což není možné, neboť φ_1, φ_2 jsou netriviální periodické funkce. Proto

$$\text{buď } \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t)| > 0, \quad \text{nebo} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_2(t)| > 0,$$

odkud vzhledem k tvrzení 1.3(b) vyplývá, že rovnice (L) není asymptoticky stabilní. $\square$

4. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Věta 3.1 udává kompletní popis stability rovnice (L) v řeči jejích Floquetových multiplikátorů. Jednotlivá tvrzení však bohužel neobsahují efektivní kritéria stability a nestability, neboť Floquetovy multiplikátory nelze obecně jednoduše vypočítat. Možné použití této věty k důkazu jednoduchých kritérií, jejichž předpoklady lze snadno ověřit, jsme ukázali v příspěvku [2]. Je v něm také diskutována souvislost

Floquetových charakteristických exponentů s tzv. Ljapunovými charakteristickými exponenty objevujícími se často v nelineární dynamice, a je ukázáno, jak lze Floquetovu teorii použít v důkazu stability dolního ekvilibria matematického kyvadla s vertikálně oscilujícím závěsem.

Větu 3.1 jsme dokázali použitím jednoduchého aparátu matematické analýzy. Podstatnou roli v důkazech však hrálo tvrzení 2.5 o možné reprezentaci fundamentálního systému řešení rovnice (L) v řeci Floquetových multiplikátorů, k jehož důkazu jsou potřeba pokročilejší partie Floquetovy teorie (viz [3, důkaz věty 2.6]). Jednotlivá tvrzení věty 3.1 jsou samozřejmě v souladu s fakty známými pro lineární soustavy diferenciálních rovnic s periodickou maticovou funkcí (viz např. [4, kapitola 2.7]):

- (a) Část (1) říká, že leží-li oba Floquetovy multiplikátory uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině, pak je rovnice (L) exponenciálně stabilní. Asymptotická stabilita v tomto případě vyplývá z Floquetovy teorie, důkaz exponenciální stability potřebuje další drobnou analýzu.
- (b) Část (2) říká, že leží-li alespoň jeden Floquetův multiplikátor vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, pak je rovnice (L) nestabilní.
- (c) Části (3)–(5) říkají, že leží-li Floquetovy multiplikátory v jednotkovém kruhu v komplexní rovině, avšak alespoň jeden multiplikátor leží na jeho hraniční kružnici, pak je rovnice (L) buď stabilní (ale ne asymptoticky stabilní), nebo nestabilní. Z Floquetovy teorie je známo, že v takovém případě je rovnice (L) stabilní právě tehdy, když každému multiplikátoru ležícímu na hraniční kružnici odpovídají pouze lineární elementární dělitele². V částech (3) a (5) jsou Floquetovy multiplikátory jednoduché, a proto jim odpovídající elementární dělitele jsou lineární. Z části (4) pak vyplývá, že dvojnásobnému Floquetovu multiplikátoru ležícímu na hraniční kružnici odpovídají lineární elementární dělitele právě tehdy, když jsou všechna řešení rovnice (L) periodická.

REFERENCE

- [1] G. Sansone: *Ordinary differential equations. Vol. I.*, Izdat. Inostrannoj Literatury, Moscow, 1953, rusky.
- [2] J. Šremr: *Floquetova teorie a stabilita lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty*. Pokroky Mat. Fyz. Astron. **68** (2023), No. 4, 246–274.
- [3] J. Šremr: *Floquetova teorie pro lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty I*. Kvaternion (2022), No. 1–2, 17–31. Dostupné z: http://kvaternion.fme.vutbr.cz/2022/kv22_1-2_sremr_web.pdf.
- [4] V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskij: *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*, Nauka, Moscow, 1972, rusky.

Jiří Šremr, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: sremr@fme.vutbr.cz

²Tento pojem jsme vysvětlili v [3] na str. 24.