

JAK INTEGROVAT PŘIROZENÁ ČÍSLA, STROMY A JINÉ OPERÁDY

DOMINIK TRNKA

ABSTRAKT. Představíme čtenáři myšlenku algebraické integrace a její obohacenou verzi. Integraci provedeme názorně na jednoduchých příkladech, tj. zintegrujeme soubor množin, orientovaný multigraf, uspořádaný monoid přirozených čísel a operádu planárních stromů.

ÚVOD

Pod pojmem *integrace* si čtenář pravděpodobně vybaví symbol $\int$, graf nějaké spojitě funkce f a způsob, jakým lze spočítat obsah pod tímto grafem na daném intervalu $I = [a, b]$. Obsah zpravidla určujeme nalezením primitivní funkce F a dosazením do formule

$$\int_I f = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ideově bychom mohli proces integrace popsat tak, že pro zadaný objekt f nalezneme nový objekt F , který obsahuje informaci o původním objektu (platí totiž $F' = f$), a zároveň nám integrace umožňuje se o původním objektu dozvědět něco víc. Úkolem tohoto textu je seznámit čtenáře s obdobným principem ve světě algebraických struktur. Poznamenejme, že slovo *integrace* se běžně používá i mimo matematiku, pochází z latinského *integer*, tj. *celý*, a mohli bychom ho tak překládat jako *scelovat*, neboli *činit celistvým*. Necháváme na čtenáři, aby si tento význam propojil s procesem integrace funkcí. Věříme, že v algebraickém kontextu níže bude patrné, proč jsme zvolili právě tento výraz, přestože se nejedná o standardní terminologii.

Než představíme integraci v algebraickém kontextu, je nutné vysvětlit, co považujeme za algebraickou strukturu. Typicky máme na mysli nosnou množinu A spolu s operacemi

$$\alpha: A \times \cdots \times A \rightarrow A,$$

splňujícími určité rovnosti. Přírozenými příklady jsou samotná množina (tj. triviální algebraická struktura), pologrupa, monoid, grupa, vektorový prostor, a jiné.

2020 MSC. Primární 05C05,18D30;18M60;18N10.

Klíčová slova. Algebraická integrace; kategoriální operáda; operadická fibrace; Grothendieckova konstrukce; stromy.

Připomeňme čtenáři algebraickou strukturu zvanou pologrupa. Pologrupa je množina P spolu s binární operací

$$\mu: P \times P \rightarrow P,$$

splňující rovnost

$$\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$$

pro libovolná $a, b, c \in P$. V infixové notaci $\mu(a, b) = a \cdot b$ má rovnice známý tvar

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Obecněji můžeme strukturou rozumět soubor množin $\{A_s\}_{s \in S}$, indexovaný přes množinu S , kterou chápeme jako množinu *typů*, spolu s operacemi

$$\alpha: A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_k} \rightarrow A_s,$$

opět splňujícími zvolené rovnosti. Tím se třída příkladů rozšiřuje například o soubor množin, orientované multigrafy, kategorie nebo operády. Zmíněné struktury si postupně v textu představíme.

Při integraci algebraické struktury A nám půjde o nalezení nového objektu $\int A$, který věrně zachycuje a sceluje zmíněná algebraická data, tj. soubor množin, operace a rovnosti. Slovo *věrně* je zde důležité, neboť zároveň požadujeme, aby se při integraci neztratila žádná *algebraická informace*, a bylo tak možné původní objekt z jeho integrace zrekonstruovat. Formálně tak spolu s integrací budeme vyžadovat i určitou korespondenci algebraických struktur a nových objektů, které integrací vzniknou, viz. část 2. Poznamenejme, že v literatuře lze konstrukci objektu $\int A$ nalézt pod názvem *kategorie elementů* nebo *diskrétní Grothendieckova konstrukce* [8, s. I.5]. Užití symbolu $\int$ je v tomto kontextu běžné, což byla jedna z motivací pro naše názvosloví.

Dalším naším společným úkolem bude rozšířit integraci do kontextu obohacených algebraických struktur, a to konkrétně do situace, kdy nosná množina struktury je částečně uspořádaná a algebraická struktura toto uspořádání respektuje. K tomu využijeme jazyk a nástroje *teorie kategorií*. V textu se zabýváme pouze obohacenou algebraickou strukturou zvanou *obohacená operáda*. Pro zvědavé čtenáře připojujeme odkazy na přístupné texty o teorii kategorií [1] a o operádách [9, 5]. Tento text vychází především z dosud nepublikovaného článku autora [10].

Struktura textu. V části 1 uvedeme obohacenou algebraickou strukturu na množině přirozených čísel a na množině planárních zakořeněných stromů. Pro náročnější čtenáře zavedeme pojem obohacené operády a vysvětlíme jeho souvislost s dvěma představenými příklady. V části 2 provedeme integraci souboru množin $\{M_s\}_{s \in S}$ indexované přes pevně zvolenou množinu S , tj. popíšeme jeho scelení do jedné množiny $\int_S M$. V tomto případě nejsou přítomny žádné operátory ani rovnosti, a konstrukce je tak poměrně transparentní. Dále zintegrujeme orientovaný multigraf, tj. algebraickou strukturu sestávající ze dvou množin V a H (vrcholů a hran), a dále dvou operátorů $s, t: H \rightarrow V$, které přiřazují každé hraně její začátek a konec. V části 3 představíme obohacenou integraci dvou struktur z části 1. Doporučujeme čtenáři, aby se při pocitu přílišné abstrakce nebál přeskočit pasáže ke konkrétním příkladům, zejména k integraci čísel a stromů v části 3.

Proč integrovat algebraické struktury? Jak jsme již nastínili na začátku textu, integrace slouží jako nástroj pro studium integrovaného objektu. Princip algebraické integrace se dá, s jistým nadhledem, přirovnat k experimentálním metodám například ve fyzice. Pokud chceme studovat vlastnosti nějakého fyzického objektu, děláme to buď explicitně, tj. naměříme hmotnost, velikost atd., anebo objekt vystavíme určitému prostředí a zkoumáme jeho chování. Například jej vystavíme chladu, magnetickému poli nebo záření. Jinými slovy, o objektu zjistíme více informací, pokud sledujeme jeho interakci s okolím v různých situacích. V našem případě je studovaným objektem algebraická struktura. Pomocí integrace strukturu vnořujeme do nového prostředí (do prostředí kategorií), struktura tak má kolem sebe daleko více testovacích objektů, se kterými může interagovat. Lze například rozlišit dvě různé struktury $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ tak, že najdeme vhodnou kategorii $\mathcal{C}$ a ukážeme, že množina zobrazení $\{\mathcal{C} \rightarrow \int \mathcal{P}\}$, je větší či menší než množina zobrazení $\{\mathcal{C} \rightarrow \int \mathcal{Q}\}$.

Dalším přímým uplatněním integrace je dostupnost nových konstrukcí a vlastností z teorie kategorií. Chceme-li například sestrojit vhodný součin dvou struktur, můžeme obě zintegrovat, provést vhodný součin kategorií a zpětným procesem zrekonstruovat odpovídající strukturu. Tento princip je v konkrétním případě studován v [6, prop. 39].

1. PÁR STRUKTUR NA ZAHŘÁTÍ

Než se pustíme do integrace, popíšeme dvě konkrétní obohacené struktury na poměrně jednoduchých objektech. Jejich integraci provedeme na konci článku.

1.1. Přirozená čísla.

Označme $\mathbb{N}$ množinu přirozených čísel obsahující nulu. Množina $\mathbb{N}$ spolu s operací ‘+’ tvoří monoid, tj. operace $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je asociativní a má jednotku:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$0 + a = a = a + 0.$$

Dále je množina $\mathbb{N}$ uspořádaná relací $\leq$, která navíc zachovává sčítání. Přesněji řečeno, operace $+$ je homomorfismus uspořádaných množin z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (s uspořádáním po složkách) do $\mathbb{N}$. Například platí

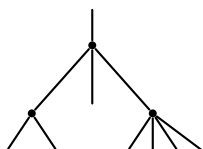
$$(3 \leq 5 \wedge 2 \leq 4) \Rightarrow 3 + 2 \leq 5 + 4.$$

Souhrnně lze říci, že $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ tvoří monoid v kategorii uspořádaných množin.

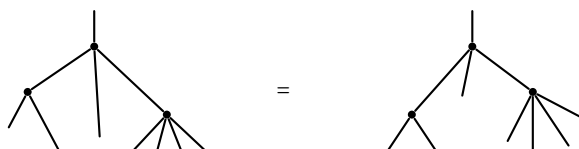
1.2. Zakořeněné planární stromy.

Podobnou, avšak o něco složitější strukturu lze popsat na množině zakořeněných planárních stromů. Formální definice zakořeněného planárního stromu je poměrně technická a nebudeme ji zde uvádět celou. Definici lze najít například v [3, s. 3 &

ex. 4.9]. Pro jednoduchost textu budeme mluvit pouze o stromech. Stromem rozumíme souvislý rovinný graf bez smyček a s vybraným kořenem. Upřednostníme estetiku textu před biologickou realitou a kořen stromu budeme kreslit vždy směřující vzhůru k nebi. Větve z vrcholů budou směřovat vždy dolů, viz. následující obrázek stromu.



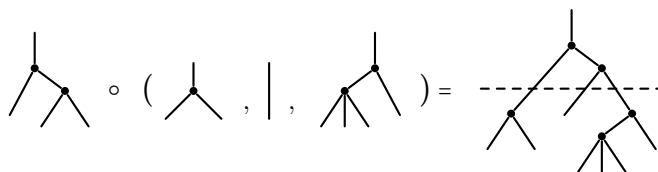
Vrcholy v kořenu a listech neuvažujeme (nekreslíme) a nezáleží nám na přesném nakreslení grafu, nýbrž na jeho vnitřní struktuře. Uvažujeme tedy rovnosti následujícího typu.



Množinu všech stromů budeme značit $\mathbb{T}$. Množina $\mathbb{T}$ je přirozeně graduovaná, tj. dá se chápat jako disjunktní sjednocení množin

$$\mathbb{T}_n = \{t \mid t \text{ je strom s } n \text{ listy}\}.$$

Podobně jako u přirozených čísel máme operaci, která kombinuje dva, či více stromů, do jednoho většího stromu. Operace se nazývá *roubování* (anglicky *grafting*) a budeme ji značit pomocí symbolu $\circ$, přičemž nalevo od symbolu $\circ$ je strom, do jehož listů postupně roubojeme stromy napravo od symbolu $\circ$. Graficky operaci vystihuje následující obrázek.



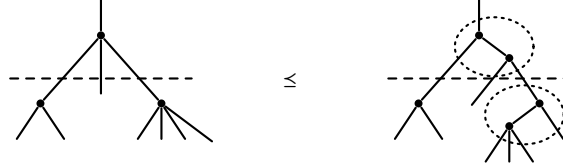
Formálně, pro libovolná přirozená čísla $n, k_1, \dots, k_n$ píšeme

$$\mathbb{T}_n \times \mathbb{T}_{k_1} \times \dots \times \mathbb{T}_{k_n} \xrightarrow{\circ} \mathbb{T}_{k_1 + \dots + k_n}.$$

Operace $\circ$ je asociativní (ve zobecněném smyslu) s jednotkou $'|' \in \mathbb{T}_1$, tj. *proutek* s jedním listem a bez vnitřních vrcholů. Dále, každou množinu $\mathbb{T}_n$ lze částečně uspořádat následujícím způsobem.

Píšeme $t \leq s$, jestliže t vznikne z s stažením vnitřních hran.

Lze nahlédnout, že operace $\circ$ respektuje částečné uspořádání $\leq$ na množinách $\mathbb{T}_n$.



Souhrnně řekneme, že $(\mathbb{T}_n, \leq, \circ, |)$ tvoří nesymetrickou operádu obohacenou v částečně uspořádaných množinách. Níže vysvětlíme, co to přesně znamená.

1.3. Obohacené operády.

Připomeňme, že pro dvě částečně uspořádané množiny $(P, \leq_P)$ a $(Q, \leq_Q)$, je jejich součin množina $P \times Q$ s uspořádáním po složkách:

$$[p', q'] \leq_{P \times Q} [p'', q''] \iff [p' \leq_P p'' \wedge q' \leq_Q q''].$$

Definice 1.1. Nesymetrická operáda obohacená v částečně uspořádaných množinách je soubor částečně uspořádaných množin $\mathcal{P}_n$, pro každé $n \geq 1$, spolu s vybraným prvkem

$$e \in \mathcal{P}_1$$

a operacemi

$$\circ: \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{k_n} \rightarrow \mathcal{P}_{k_1 + \cdots + k_n},$$

pro libovolná přirozená čísla $n, k_1, \dots, k_n$, které zachovávají uspořádání, a dále jsou asociativní a jednotkové v následujícím smyslu.

(Asociativita.) Pro libovolná přirozená čísla

$$n, k_1, \dots, k_n, m_1^1, \dots, m_{k_1}^1, \dots, m_n^n, \dots, m_{k_n}^n \in \mathbb{N}$$

a prvky $a \in \mathcal{P}_n$, $b_i \in \mathcal{P}_{k_i}$, $c_j^i \in \mathcal{P}_{m_j^i}$,

$$(a \circ (b_1, \dots, b_n)) \circ (c_1^1, \dots, c_{k_n}^n) = a \circ (b_1 \circ (c_1^1, \dots, c_{k_1}^1), \dots, b_n \circ (c_1^n, \dots, c_{k_n}^n)).$$

(Jednotka.) Pro $n \geq 1$ a prvek $a \in \mathcal{P}_n$,

$$a \circ (e, \dots, e) = a,$$

$$e \circ a = a.$$

Budeme používat zkrácené označení obohacená operáda.

Příklad 1.2. Zakořeněné planární stromy z předchozí sekce jsou přirozeným příkladem obohacené operády. Přirozená čísla s uspořádáním a sčítáním tvoří obohacenou operádu, kde $\mathcal{P}_1 = (\mathbb{N}, \leq)$, $\mathcal{P}_{n \geq 2} = \emptyset$, $\circ = +$ a $e = 0$.

2. DISKRÉTNÍ ALGEBRAICKÁ INTEGRACE

V této sekci popíšeme integraci jednodušších algebraických struktur. Zkoumáním elementárních příkladů se připravíme na integraci složitějších obohacených algebraických struktur a zároveň nastíníme význam korespondence původních objektů a objektů, jež vzniknou integrací.

2.1. Integrace souboru množin.

Uvažme soubor množin $\{M_s\}_{s \in S}$, indexovaný přes pevně zvolenou množinu S , tj. pro každý prvek $s \in S$ je dána množina M_s . Z tohoto souboru chceme vytvořit jeden celistvý objekt. Nabízí se definovat integraci souboru M jako disjunktní sjednocení

$$\int_S M_s := \bigsqcup_{s \in S} M_s = \{[s, m] \mid s \in S, m \in M_s\}.$$

Soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ jsme tímto převedli na jedinou množinu, ta však samotná nenese dostatek *algebraické informace*, neboť ztrácí explicitní informaci o tom, který prvek patřil do které množiny M_s . Informace je zachována pouze implicitně v první složce dvojice $[s, m]$. Jinými slovy, neumíme *algebraicky* (tj. aniž bychom mluvili o konkrétních prvcích $\int_S M_s$) rekonstruovat soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ z množiny $\int_S M_s$. Algebraickou informaci doplníme tak, že spolu s množinou $\int_S M_s$ uvažujeme i její kanonickou projekci $\pi_M: \bigsqcup_{s \in S} M_s \rightarrow S$, danou předpisem $\pi_M([s, m]) = s$. Formálně bychom tedy měli psát

$$\int_S M_s = \left(\bigsqcup_{s \in S} M_s \xrightarrow{\pi_M} S \right) \in \{ \text{množinová zobrazení vedoucí do } S \}.$$

Standardní je však symbolem $\int$ označovat pouze doménu projekce.

Příklad 2.1. Necht $S = \{\sharp, \flat\}$, $M_\sharp = \{X, Y, Z\}$ a $M_\flat = \{\clubsuit, \spadesuit\}$. Potom

$$\int_S M_s = \{[\sharp, X], [\sharp, Y], [\sharp, Z], [\flat, \clubsuit], [\flat, \spadesuit]\} \xrightarrow{\pi_M} \{\sharp, \flat\},$$

přičemž projekce π_M posílá každou dvojici na její první složku.

Soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ lze zrekonstruovat uvážením předobrazů projekce, tj.

$$M_s \cong \pi_M^{-1}(s). \quad (2.1)$$

Nyní si lze položit obecnější otázku, totiž zda z libovolného zobrazení množin tvaru $p: E \rightarrow S$ lze rekonstruovat soubor množin. Odpověď je kladná. Pro zadané p sestrojíme soubor E_s pomocí předobrazů

$$E_s := p^{-1}(s).$$

Integrace a předobraz zadávají určitou korespondenci objektů

$$\{ \text{soubor množin } \{M_s\}_{s \in S} \} \simeq \{ \text{zobrazení množin } p: E \rightarrow S \}, \quad (2.2)$$

Pokusíme se přiblížit, co korespondence vyjadřuje. Z (2.1) je patrné, že pro daný soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ uvážením předobrazu její integrace nedostaneme přesně původní

soubor, avšak pro každé $s \in S$ je nová množina $\pi_M^{-1}(s)$ kanonicky bijektivní s původní M_s prostřednictvím

$$M_s \ni m \leftrightarrow [s, m] \in \pi_M^{-1}(s).$$

Obdobně, pokud začneme s obecným zobrazením $p: E \rightarrow S$ a uvážíme integraci předobrazu, dostaneme bijekci

$$\int_S p^{-1}(s) \ni [p(e), e] \leftrightarrow e \in E,$$

která respektuje zobrazení do S , neboli obě *cesty po šipkách* dají stejný výsledek.

$$\begin{array}{ccc} \int_S p^{-1}(s) & \xrightarrow{\cong} & E \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & S & \end{array}$$

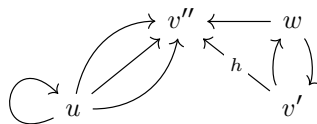
Integrační korespondence (2.2) tak není přesně bijekce tříd, ale jakási bijekce až na pojmenování: pro každý soubor umíme zkonstruovat zobrazení do S a opačně, přičemž konstrukce jsou inverzní až na přejmenování objektů. Podobnou korespondenci budeme požadovat od každé algebraické integrace. O korespondenci se dá přemýšlet jako o informační bezztrátovosti integrace.

2.2. Integrace orientovaného multigrafu.

Orientovaný multigraf Γ sestává ze dvou množin $V_\Gamma = \Gamma_0$ a $H_\Gamma = \Gamma_1$, vrcholů a hran multigrafu, a dvou množinových zobrazení

$$\Gamma_0 \xleftarrow{S} \Gamma_1 \xrightarrow{T} \Gamma_0,$$

udávajících každé hraně její počátek a konec. Příklad multigrafu je následující.



Pro hranu h z předešlého diagramu píšeme $S(h) = v'$ a $T(h) = v''$. Integrace multigrafu je množina dvojic

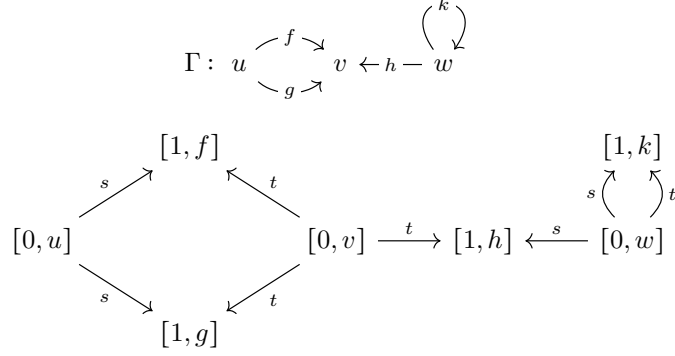
$$\int_2 \Gamma = \{[i, \alpha] \mid i \in \{0, 1\} \text{ a } \alpha \in \Gamma_i\},$$

spolu se dvěma (jednostrannými) relacemi

$$[0, S(h)] \xrightarrow{s} [1, h], \quad [0, T(h)] \xrightarrow{t} [1, h].$$

Symbol 2 označuje množinu $\{0, 1\}$, vybavenou relacemi $0 \xrightarrow{s} 1$ a $0 \xrightarrow{t} 1$. Součástí integrace je projekce $\pi_\Gamma: \int_2 \Gamma \rightarrow 2$, která zachovává relace $\xrightarrow{s}$ a $\xrightarrow{t}$.

Příklad 2.2. Následující dva diagramy zobrazují multigraf Γ a jeho integraci.



Nyní určíme pravou stranu integrační korespondence. Necht E je libovolná množina se dvěma relacemi $\xrightarrow{s}$ a $\xrightarrow{t}$ a $p: E \rightarrow 2$ je zobrazení množin, které relace zachovává, tj. platí

$$a \xrightarrow{s} b \Rightarrow p(a) \xrightarrow{s} p(b), \quad a \xrightarrow{t} b \Rightarrow p(a) \xrightarrow{t} p(b).$$

Není těžké si rozmyslet, že ne každé takové zobrazení p jednoznačně zadává orientovaný multigraf. Mezi všemi zobrazeními p musíme vybrat pouze ta, jež splňují následující algebraickou vlastnost.

Definice 2.3. Necht E je množina se dvěma relacemi $\xrightarrow{s}, \xrightarrow{t}$ a $p: E \rightarrow 2$ je zobrazení množin, které relace zachovává. Zobrazení p nazveme diskretní fibrací, jestliže navíc pro libovolný prvek $x \in E$ platí:

$$\text{pokud } 0 \xrightarrow{\alpha} p(x) \text{ v } 2, \text{ pak existuje jediné } y \in E \text{ takové, že } y \xrightarrow{\alpha} x \text{ v } E,$$

pro $\alpha \in \{s, t\}$.

Poznamenejme, že tuto vlastnost splňuje každé π_Γ pocházející z integrace multigrafu. Z každé diskretní fibrace p lze zrekonstruovat orientovaný multigraf: položíme $V_p = p^{-1}(0)$, $H_p = p^{-1}(1)$, a dále pro $h \in H_p$ definujeme $S(h)$ z vlastnosti fibrace, tj. jediný element $S(h) := v$, který splňuje $v \xrightarrow{s} h$, neboť $0 \xrightarrow{s} 1 = p(h)$. Vrchol $T(e)$ definujeme obdobně a dostáváme kýženou korespondenci

$$\{\text{orientované multigrafy}\} \simeq \{\text{diskretní fibrace } p: E \rightarrow 2\}.$$

2.3. Diskretní integrace v plné obecnosti.

Pro koncepční vysvětlení a univerzální přístup k diskretní integraci algebraických struktur je vhodné použít jazyka *teorie kategorií*. V této sekci nebudeme úplně formální, neboť technické detaily by tomuto textu neprospěly. Poznamenejme, že všechny vyvstálé nejasnosti či paradoxy se dají ošetřit. Čtenáře odkazujeme na klasickou literaturu, např. [1].

Kategorii $\mathcal{C}$ chápeme jako zobecněnou množinu, kde kromě prvků $a, b, c \in \mathcal{C}$ (tzv. objektů kategorie) uvažujeme i systém relací mezi nimi (tzv. morfismů mezi

objekty), které značíme

$$f: a \rightarrow b.$$

Požadujeme, aby se morfismy daly skládat, tj. pro libovolné $f: a \rightarrow b$ a $g: b \rightarrow c$ existuje jednoznačně morfismus $(g \circ f): a \rightarrow c$, a aby skládání bylo asociativní a mělo jednotky, tedy aby platilo

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

a pro každý objekt $a \in \mathcal{C}$ existoval morfismus $1_a: a \rightarrow a$ s vlastností

$$1_b \circ f = f = f \circ 1_a.$$

Morfismu 1_a říkáme *identita* na objektu a . Dalším pojmem teorie kategorií je *funktor*, tj. zobrazení kategorií $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Funktor objektům $a \in \mathcal{C}$ přiřazuje objekty $Fa \in \mathcal{D}$ a morfismům $f: a \rightarrow b$ z $\mathcal{C}$ přiřazuje morfismy $Ff: Fa \rightarrow Fb$, přičemž přiřazení respektuje skládání a jednotky.

Příklad 2.4.

- Každá množina S zadává tzv. diskrétní kategorii, jejíž objekty jsou prvky $s \in S$ a jejíž morfismy jsou pouze (umělá) zobrazení $1_s: s \rightarrow s$. Funktory diskrétních kategorií jsou jednoduše množinová zobrazení.
- Bohatším příkladem je kategorie množin Set , jejíž objekty jsou množiny a morfismy jsou klasická množinová zobrazení $f: X \rightarrow Y$. Poznamenejme, že funktory $M: S \rightarrow \text{Set}$, z diskrétní kategorie S , jsou přesně soubory množin M_s .
- Z libovolné kategorie $\mathcal{C}$ lze vytvořit novou kategorii prostým otočením všech šipek. Novou kategorii značíme $\mathcal{C}^{\text{op}}$.
- V souvislosti s multigrafy uvedeme kategorii $\mathbf{2}$, která má dva objekty 0 a 1 , a dále kromě identit na objektech další dva morfismy $s: 0 \rightarrow 1$ a $t: 0 \rightarrow 1$. Funktory

$$\Gamma: \mathbf{2}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

jsou přesně orientované multigrafy.

Nyní přizpůsobíme pojem diskrétní fibrace z definice 2.3 pro libovolnou kódoménu $\mathcal{C}$.

Definice 2.5. Necht $\mathcal{E}, \mathcal{C}$ jsou kategorie a $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ je funktor. Potom p nazveme diskrétní fibrací, jestliže pro libovolný objekt $X \in \mathcal{C}$ a morfismus $f: y \rightarrow p(X)$ v $\mathcal{C}$ existuje jediný morfismus $\tilde{f}: Y \rightarrow X$ v $\mathcal{E}$, takový, že $p(\tilde{f}) = f$. Schematicky:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad \exists! \quad} & X \in \mathcal{C} \\ p \downarrow & & \\ y & \xrightarrow{\quad f \quad} & p(X) \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Obecně lze diskrétní algebraickou integraci formulovat následujícím způsobem.

Věta 2.6. *Nechť $\mathcal{C}$ je kategorie a $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ funktor. Integrace $\int_{\mathcal{C}} F$ je kategorie, jejíž objekty jsou páry $[c \in \mathcal{C}, \alpha \in Fc]$ a morfismy jsou tvaru*

$$\bar{f}: [d, Ff(\alpha)] \rightarrow [c, \alpha],$$

kde $f: d \rightarrow c$ je morfismus $\mathcal{C}$. Integrace je vybavena projekcí (funktoem)

$$\pi_F: \int_{\mathcal{C}} F \rightarrow \mathcal{C},$$

jež je diskrétní fibrací. Dále je zde korespondence (jednoznačná až na kanonický izomorfismus)

$$\{\text{funktorů } F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}\} \simeq \{\text{diskrétní fibrace } p: E \rightarrow \mathcal{C}\}.$$

Důkaz. Tvrzení je standardní, důkaz uvádí například [7, s. 2]. □

3. OBOHACENÁ ALGEBRAICKÁ INTEGRACE

Abychom mohli popsat integraci obohacených struktur, potřebujeme, na straně druhé, obohatit i kategorie. Opět zjednodušeně, kategorie $\mathcal{C}$ obohacená v částečně uspořádaných množinách je množina objektů $\mathcal{C}$ s relacemi mezi objekty (tj. s morfismy $f: a \rightarrow b$), přičemž morfismy vedoucí mezi každými dvěma objekty a, b jsou částečně uspořádané, viz. následující diagram.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ a & \xrightarrow{g} & b \\ & \curvearrowleft & \\ & h & \end{array}$$

Dále požadujeme, aby skládání morfismů tato částečná uspořádání respektovalo. Malá obohacená kategorie může vypadat následovně.

$$\begin{array}{ccccc} & & b & \xleftarrow{i} & d \\ & f' & \curvearrowright & & \downarrow j' \\ & & c & \xleftarrow{f''} & a \\ & & \downarrow g & & \downarrow h \\ & & c & \xleftarrow{h} & a \end{array}$$

Integrace obecné obohacené operády z definice 1.1, stejně jako pojem operadické fibrace, je pro tento text příliš technicky náročná, zvědavého čtenáře odkážeme na [10]. Pojmy vychází ze standardního pojmu (kategoriální) fibrace (viz. např. [4]), jejíž diskrétní verzi jsme uvedli v definici 2.5, a dále z pojmu diskrétní operadické fibrace, zavedeného v [2]. Text [10] zavádí explicitní integraci libovolné obohacené operády a poskytuje korespondenci

$$\{\text{obohacené operády}\} \simeq \{\text{operadické fibrace}\},$$

používá však nepatrně obecnější kontext kategoriálních operád. Instanci obohacené integrace si názorně předvedeme, tj. zintegrujeme struktury z části 1 a uvedeme některé jejich zajímavé vlastnosti.

3.1. Integrace přirozených čísel.

Připomeňme monoid přirozených čísel $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ v částečně uspořádaných množinách, popsany v části 1. Jeho integrace je obohacená kategorie $\int \mathbb{N}$, jejíž objekty jsou přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ a její morfismy jsou tvaru $a \xrightarrow{p} b$, kde $p \in \mathbb{N}$ a $p + b \geq a$. Na příkladu ukážeme jak funguje skládání morfismů.

Složení morfismů $5 \xrightarrow{4} 2$ a $2 \xrightarrow{5} 0$ je morfismus $5 \xrightarrow{4+5} 0$.

Platí totiž $4 + 2 \geq 5$ a $5 + 0 \geq 2$, a proto i $(4 + 5) + 0 = 4 + (5 + 0) \geq 4 + 2 \geq 5$. Roli identity $n \xrightarrow{1_n} n$ zastává morfismus $n \xrightarrow{0} n$, neboť platí $0 + n \geq n$ a $0 + p = p = p + 0$. Je vidět, že pro komponování morfismů v $\int \mathbb{N}$ jsou zapotřebí všechny algebraické vlastnosti částečně uspořádaného monoidu $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$, popsané v části 1. Dále, pro dvě zafixovaná čísla a a b tvoří morfismy množinu uspořádanou relací $\leq$. To jest,

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ a & \xrightarrow{\quad} & b \\ & q & \end{array}$$

jestliže $p \geq q$ jakožto přirozená čísla. Následující diagram zachycuje část kategorie $\int \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & 11 & & \\ & & \vee & & \\ 5 & \xrightarrow{4} & 2 & \xrightarrow{5} & 0 \\ & \vee & & \vee & \\ & 3 & \xrightarrow{2} & & \\ & & \parallel & & \\ & & 5 & & \end{array}$$

Všimněme si, že každý morfismus $p: a \rightarrow b$ (tj. $b + p \geq a$) lze přirozeně rozložit jako

$$a \xrightarrow{0} b + p \xrightarrow{p} b.$$

Navíc, pro libovolná dvě čísla $a \geq b$ má uspořádaná množina morfismů $a \xrightarrow{p} b$ nejmenší prvek, kterým je $a \xrightarrow{a-b} b$.

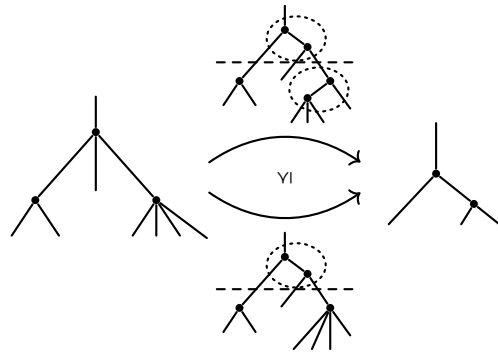
Množinově se při integraci přirozených čísel nestalo nic moc zajímavého, neboť objekty $\int \mathbb{N}$ jsou stejné jako objekty (prvky) $\mathbb{N}$. Pozorujeme však, že integrace spojila struktury dvou různých typů, tj. relace $\leq$ a operace $+$, v jednu strukturu morfismů na $\mathbb{N}$. Sčítání čísel je zakódováno ve skládání morfismů

$$0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 0 = 0 \xrightarrow{a+b} 0$$

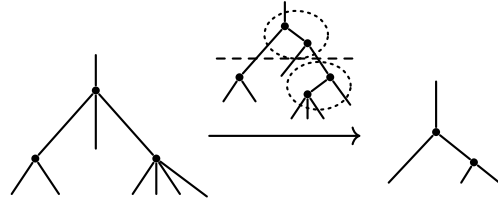
a uspořádání $\leq$ je zachováno jednak v uspořádání morfismů $\{0 \xrightarrow{p} 0\}$, a jednak přímo pomocí morfismů $b \xrightarrow{0} a$.

3.2. Integrace stromů.

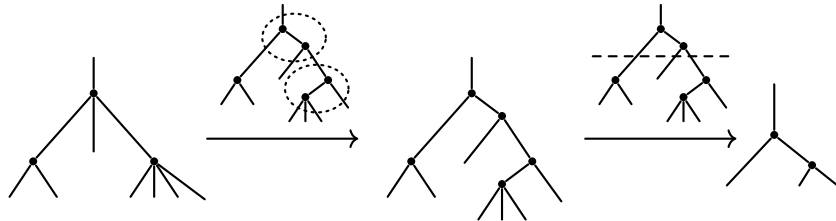
Připomeňme obohacenou operádu stromů $\mathbb{T}$ ze části 1. Její integrací je kategorie $\int \mathbb{T}$, jejíž objekty jsou stromy. Morfismus stromů $s \rightarrow t$ se dá popsat jako nový strom p vybavený (i) řezem (naznačeno přerušovanou čarou), přičemž část nad řezem je strom t , a (ii) posloupností kontrakcí hran stromu p (naznačeno přerušovanými elipsami), které vyústí ve strom s . Morfismy jsou částečně uspořádány relací $\leq$, pocházející z uspořádání operády $\mathbb{T}$, tj. danou kontrakcí vnitřních hran. Příklad dvou morfismů a jejich uspořádání je následující.



Opět zmiňme, že libovolný morfismus



lze rozložit na dvě části



z nichž první využívá pouze strukturu uspořádání, tj. stahování hran (přičemž řez je veden u listů) a druhá pouze struktury operády, tj. řezu (přičemž posloupnost stažení hran je prázdná). Dále, z každého stromu s vede speciální morfismus do

triviálního stromu $[\cdot]$. Tím je samotný strom s bez jakýchkoliv kontrakcí a s řezem u kořene.

Nakonec zmiňme, že operády jsou struktury *typu* Δ , tj. kategorie, jejíž objekty jsou konečné uspořádané množiny $\{1, \dots, m\}$ a jejíž morfismy jsou surjekce zachovávající pořadí. Vlastnost operadické fibrace

$$\pi_{\mathbb{T}}: \int_{\Delta} \mathbb{T} \rightarrow \Delta$$

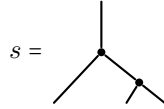
říká, že pro zadaný strom s mající n listů a pro libovolné surjektivní zobrazení množin

$$f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

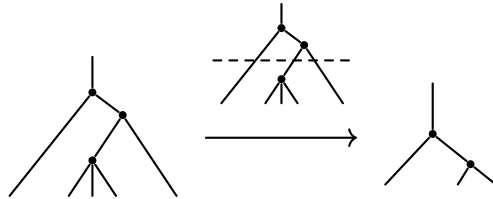
zachovávající pořadí, existuje univerzální strom t_f s m listy a (v jistém smyslu univerzální) morfismus stromů $t_f \rightarrow s$. Rozhodli jsme se nezatěžovat text dalšími detaily a místo nich uvedeme pouze konkrétní příklad univerzálního morfismu pro konkrétní s a f .

Příklad 3.1. Nechť s je následující strom a zobrazení $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ je zadané jako

$$f(1) = 1, f(2) = f(3) = f(4) = 2 \text{ a } f(5) = 3.$$



Univerzální morfismus $t_f \rightarrow s$ v této situaci vypadá následovně (povšimněme si, že nestahuje žádné hrany stromu t_f).



REFERENCE

- [1] S. Awodey: *Category theory*, Oxford University Press, 2010.
- [2] M. A. Batanin, M. Markl: *Operadic categories and duoidal Deligne's conjecture*, Advances in Mathematics, 285:1630–1687, 2015.
- [3] M. A. Batanin, M. Markl: *Operadic categories as a natural environment for Koszul duality*, Compositionality, 5, 2023.
- [4] F. Borceux: *Handbook of Categorical Algebra, Vol. 2*, Cambridge University Press, 1994.
- [5] T.-D. Bradley: *What is an operad? Part 1*, Personal webpage, <https://www.math3ma.com/blog/what-is-an-operad-part-1>, 2017. Accessed 02.09.2025.
- [6] D. Dunina: *Wreath product of operadic categories*, Diplomová práce, Univerzita Karlova, 2024.

- [7] F. Loregian and E. Riehl: *Categorical notions of fibration*, Expositiones Mathematicae, 38(4), 2020.
- [8] S. MacLane and I. Moerdijk: *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] J. Stasheff: *What is an operad*, Notices of the AMS, 51(6), 2004.
- [10] D. Trnka: *Integration of a categorical operad*. Theory and Applications of Categories, 45(3), 2026.

Dominik Trnka, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: `trnka@fme.vutbr.cz`