

METRICKÉ PROSTORY PŘÍMKOVÝCH PLOCH

MATOUŠ TRNKA

ABSTRAKT. Tento článek pojednává o metrických vlastnostech přímkových ploch, které jsou chápány jako křivky na homogenní varietě přímek, a využívá přístupu zavedeného Felixem Kleinem. Stanovuje si dva hlavní cíle: nalezení systému invariantů, který plochu jednoznačně popisuje bez ohledu na umístění nebo parametrizaci, a klasifikaci homogenních přímkových ploch, jež mají tyto invarianty konstantní. Jako klíčový nástroj slouží konstrukce pohyblivého repéru křivky v libovolném homogenním prostoru, jež je zobecněním konstrukce známé jako Frenetova–Serretova.

1. ÚVOD

V tomto článku se seznámíme s konceptem, který je součástí naší geometrické intuice už od střední školy. Když například řešíme úlohu o kružnici, nakreslíme si na papír nějakou kružnici a nezajímá nás, kde v prostoru se nachází nebo jaký má poloměr. Skutečnost je taková, že pod pojmem „kružnice“ myslíme třídu všech kružnic v rovině, a protože jsou si všechny podobné, můžeme danou úlohu řešit s libovolným reprezentantem této třídy. Jiná situace však nastane, je-li v úloze potřeba něco měřit. Pak musíme od sebe rozlišit kružnice s různými poloměry a chceme tedy ztotožnit pouze kružnice navzájem shodné, nikoli podobné.

V textu se pokusíme uvést výhody úhlu pohledu, který zavedl Felix Klein v říjnu roku 1872 na univerzitě v Erlangen u příležitosti svého profesorského jmenování, a sice že geometrie daného prostoru není zakódována v nosné množině prvků prostoru, nýbrž v transformacích, které k danému prostoru uvažujeme.

Předmětem zkoumání zde bude tzv. *přímková plocha*, tedy plocha, která může vzniknout pohybem přímky v prostoru, případně pohybem napnuté struny skrz kostku hlíny. Tyto plochy však budeme vnímat jako křivky na jakési varietě přímek, pro které si stanovíme dva cíle.

Prvním z nich nechť je nalezení tzv. *systému invariantů* přímkové plochy, tedy charakteristik, které danou plochu jednoznačně popisují, bez ohledu na její parametrizaci nebo umístění v prostoru. Dva takové systémy je již možné nalézt v literatuře, konkrétně v knihách [1] a [2]. My však v první kapitole tohoto textu nabídneme lehce odlišný pohled na věc, ve druhé kapitole si vyzkoušíme odvození invariantů prostorové křivky a zjištěné poznatky pak ve třetí kapitole aplikujeme

2020 MSC. Primární 53A25; Sekundární 53A55, 53A04.

Klíčová slova. Křivky, přímkové plochy, Frenetův repér, invarianty, homogenní křivky.

Práce byla podpořena projektem MUNI/A/1569/2024.

na přímkové plochy. Ke zmíněným systémům invariantů se tak dostaneme zcela přirozenou cestou.

Druhým cílem pak bude rozřadit všechny přímkové plochy *homogenní*. Ty si můžeme představit jako ekvivalent k homogenním křivkám, kterými jsou v prostoru přímka, kružnice nebo tzv. šroubovice (jejíž tvar má například pružina). Jejich hlavní vlastností je, že při vhodném posouvání, otáčení nebo šroubování dané křivky (později i plochy) se nemění prostor, který tato křivka zaujímá. Samotnou klasifikaci pak provedeme podobným nástrojem jako v konstrukci invariantů.

2. METRICKÉ HOMOGENNÍ PROSTORY

Původem slova „metrika“ je řecké „*metria*“, tedy měření. Ze základů eukleidovské geometrie pak vyplývá, že měřit lze v prostoru mimo jiné vzdálenost nějakých dvou bodů nebo odchylku nějakých dvou přímek, přičemž tyto dvě míry nás budou v tomto textu zajímat nejvíce.

Jak bylo uvedeno v úvodu, při zkoumání geometrie metrického prostoru nezáleží tolik na nosné množině prvků, nýbrž na třídě uvažovaných transformací. V našem případě půjde v průběhu celého textu o tzv. *přímé shodnosti trojrozměrného prostoru*, tj. transformace, které zachovávají prostorové vzdálenosti, úhly a orientace. Alternativně lze říci, že to jsou ty transformace, které zobrazí jednotkovou krychli vždy na jednotkovou krychli, a to se zachováním orientace vrcholů. To znamená, že pohlédneme-li na krychli stěnou $ABCD$ k sobě a přečteme-li tyto vrcholy po směru hodinových ručiček, čteme je ve stejném pořadí i po dané transformaci.

Protože pro každou takovou shodnost existuje i shodnost zpětná a protože identita, tj. transformace zobrazující každý bod sám na sebe, je také přímou shodností, má tato třída strukturu grupy, kterou budeme značit G . Tato grupa je šesti-rozměrná, neboť krychli můžeme jednak posouvat ve třech navzájem kolmých směrech a jednak rotovat kolem tří navzájem kolmých os. Od této chvíle tedy neuvažujeme jiné transformace prostoru než tyto.

Homogenní prostory bodů a přímek

Máme-li již zafixovanou grupu shodností, můžeme se zabývat množinou nosnou, tedy které objekty můžeme danými shodnostmi transformovat. Jak je naznačeno v prvním odstavci této kapitoly, základními adepty jsou body a přímky.

Množinu bodů v trojrozměrném eukleidovském prostoru budeme značit $\mathbb{E}^3$, přičemž dimenze 3 se odvíjí od počtu směrů, ve kterých můžeme daným bodem hýbat.

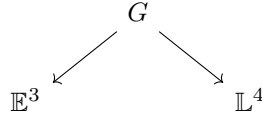
Množinu přímek pak budeme značit $\mathbb{L}^4$, přičemž dimenze 4 plyne z faktu, že danou přímkou můžeme hýbat jednak posouváním ve dvou směrech na ni kolmých a jednak rotací kolem dvou na ni kolmých os.

K uvedeným množinám ještě přidejme množinu vektorů $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$, které chápeme jako orientované úsečky mezi dvojicemi bodů, přičemž nebereme v potaz jejich umístění. Zobrazení-li v nějaké shodnosti dva vektory, jejich obrazy budou stejně velké a budou mít mezi sebou stejnou odchylku. Toto souvisí také se skutečností, že shodnosti jsou přesně ty transformace reálného prostoru, které zachovávají tzv.

skalární součin dvou vektorů jakožto symetrickou bilineární formu zadávající euclidovskou metriku.

Prostor bodů a prostor přímek jsou vzhledem ke grupě G homogenní. To znamená, že pro libovolné dva body A, B existuje alespoň jedna shodnost, která A převede na B , podobně pro dvě libovolné přímky. Této vlastnosti říkáme tzv. *transitivní akce grupy G na prostoru $\mathbb{E}^3$, resp. $\mathbb{L}^4$* . Díky tomu vypadá prostor „všude stejně“ a my jej tak můžeme prozkoumat pouhou volbou jednoho počátku a zkoumáním jeho okolí.

Po zbytek textu tedy zvolme počáteční bod $O \in \mathbb{E}^3$, resp. počáteční přímku $\mathcal{O} \in \mathbb{L}^4$. Uvažíme-li pak libovolnou shodnost $g \in G$, můžeme se ptát, kam tato shodnost zobrazí počáteční bod, resp. počáteční přímku, což nám zadává dvě přirozené projekce:



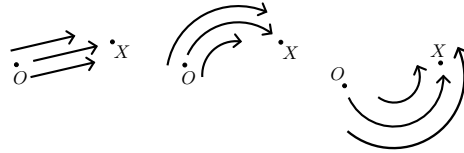
Máme-li zvolený počátek, bude pro nás užitečné zavést i tzv. *stabilizační podgrupu G_O^3 , resp. G_O^2* , jež obsahuje právě ty shodnosti, které zachovávají počáteční bod O , resp. počáteční přímku $\mathcal{O}$, na svém místě. Čísla u nich opět udávají jejich dimenze, protože bod je zachován rotacemi kolem tří navzájem kolmých os, které jím procházejí, a přímka je zachována jednak rotací kolem sebe samé a jednak posunem ve svém směru.

Prostor $\mathbb{E}^3$, resp. $\mathbb{L}^4$ pak můžeme ztotožnit s prostorem tzv. *levých tříd G/G_O^3 , resp. G/G_O^2* , přičemž příslušnou levou třídu definujeme a s příslušným bodem, resp. přímkou, ztotožníme následovně:

$$[gG_O^3] = \{gh, h \in G_O^3\} \leftrightarrow g(O),$$

$$[gG_O^2] = \{gh, h \in G_O^2\} \leftrightarrow g(\mathcal{O}).$$

Dvě shodnosti tedy zařadíme do stejné třídy právě tehdy, když zobrazují počátek na stejný bod v prostoru, resp. počáteční přímku na stejnou přímku v prostoru.



Obrázek 1. Různé shodnosti třídy $[gG_O^3]$

Všimněme si, že dimenze faktorprostoru jakožto rozdíl dimenzí šesti-rozměrné grupy a trojrozměrného, resp. dvojrozměrného, stabilizátoru souhlasí.

Souřadnice

Abychom mohli v dalším textu s uvedenými objekty počítat, je třeba jim přiřadit nějaké souřadnice. Z praktických důvodů budeme trojrozměrný eukleidovský prostor chápat jako afinní nadrovinu čtyřrozměrného reálného vektorového prostoru s první souřadnicí rovnou jedné. Kartézské souřadnice každého bodu x_A, y_A, z_A tak rozšíříme na čtveřici $A = (1, x_A, y_A, z_A)^T$, přičemž transpozice T je zde z důvodu sloupcového zápisu souřadnic. Vektor jakožto rozdíl dvou bodů vyjádříme čtveřicí $u = (0, u_1, u_2, u_3)^T$ a přímkou získáme jako součet bodu a s -násobku vektoru, tedy např. $\mathcal{L} = A + s \cdot u$. Skalárním součinem dvou vektorů chápeme výraz

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

a shodností je pak lineární automorfismus čtyřrozměrného prostoru zachovávající zmíněnou nadrovinu, ve které je navíc zachován i onen skalární součin a orientace báze. Matice takového lineárního zobrazení má kvůli zachování nadroviny blokový tvar

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & R \end{array} \right) \in G,$$

podmínka pro zachování skalárního součinu pak vynucuje matici R ortogonální a podmínka pro zachování orientace vyžaduje $\det(R) = 1$. Blok a této matice budeme nazývat *translační* a blok R *rotační*. Rozdělíme-li pak tuto matici do čtyř sloupců, dostaneme jeden libovolný bod a tři na sebe kolmé jednotkové vektory, tedy tzv. *ortonormální repér* (A, r_1, r_2, r_3) , který je vlastně obrazem standardního ortonormálního repéru (O, e_1, e_2, e_3) v dané shodnosti.

Na závěr kapitoly se pokusme objasnit, jak vypadají třídy rozkladu grupy. V případě prostoru bodů uvažujeme počátek $O = (1, 0, 0, 0)^T$, který je stabilizován rotacemi

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & R \end{array} \right) \in G_O^3.$$

V každé třídě $[gG_O^3]$ pak najdeme reprezentanta s triviálním rotačním blokem

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & R \end{array} \right) G_O^3 \right] = \left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & E \end{array} \right) G_O^3 \right],$$

neboť obě matice stejně zobrazí počátek O na bod $A = (1, a_1, a_2, a_3)^T$.

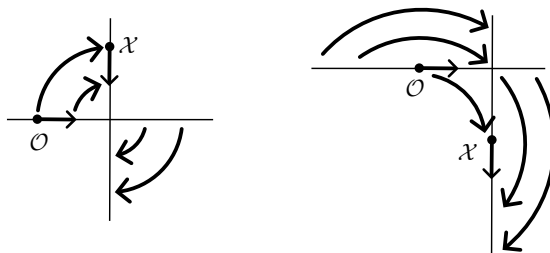
V prostoru přímek je počátkem přímk $\mathcal{O} = O + s e_1 = (1, s, 0, 0)^T$, kterou stabilizují shodnosti ve tvaru

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{32} & r_{33} \end{array} \right) \in G_{\mathcal{O}}^2,$$

přičemž koeficient a_1 vyjadřuje posun podél osy x a ortogonální blok r_{ij} rotaci kolem této osy. Dohromady pak tyto dvě složky zadávají tzv. *šroubový pohyb*.

Na rozdíl od předchozího případu nemáme v třídě $[gG_{\mathcal{O}}^2]$ přirozeného reprezentanta. Odpovídající přímk je totiž zadána prvními dvěma sloupci matice g , které

hrají roli bodu a směřového vektoru přímky, jenže bodů zadávajících tutěž přímku je mnoho a všechny jsou rovnocenné, jak lze vidět na obrázku 2.



Obrázek 2. Různé shodnosti téže třídy $[gG_{\mathcal{O}}^2]$

3. INVARIANTY PROSTOROVÝCH KŘIVEK

Ve zbytku článku se budeme zabývat křivkami v homogenních prostorech a jejich shodnostmi. Nejprve prozkoumáme křivky v prostoru bodů, z nich vyvodíme poznatky pro obecný homogenní prostor a ty pak aplikujeme na křivky v prostoru přímek, tedy *přímkové plochy*. Vrcholem této úvodní sekce je tvrzení 1, které zde uvádíme z důvodu postupného budování tvrzení pozdějších, jejichž důkazy pak budou o to snazší.

Zkoumáme-li shodné křivky, tj. kdy mezi dvěma křivkami existuje shodnost zobrazující jednu křivku na druhou (viz obrázek 3), zajímají nás její *invarianty*. To jsou charakteristiky závislé na parametru křivky, které jsou shodnými transformacemi zachovány. V případě křivky v eukleidovském prostoru je to její křivost a torze, které dohromady stačí na úplný popis křivky až na shodnosti, jak uvidíme v konstrukci v následující kapitole.

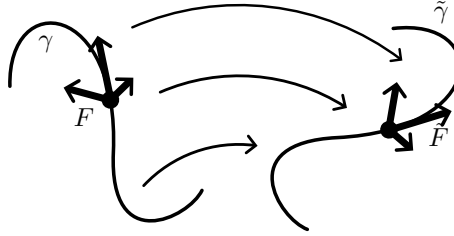
Prostorovou křivkou chápeme zobrazení $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, které reálnému parametru t přiřadí bod na křivce $\gamma(t) \in \mathbb{E}^3$. Jinou parametrizací téže křivky pak chápeme zobrazení $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, které má stejný obraz jako γ .

Uvažujeme-li jednu křivku vzhledem k různým parametrizacím, obecně sama se sebou nebude shodná. V metrickém prostoru má však každá regulární křivka (tj. taková splňující $\gamma' \neq 0$) jistou přirozenou parametrizaci, tzv. *parametrizaci obloukem*, odpovídající délce části křivky od jejího krajního bodu $\gamma(t_0)$, tedy $\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^3$, kde L je celková délka křivky. Tato parametrizace je invariantní vůči shodnostem. Jestliže tedy takto parametrizujeme dvě křivky $\gamma, \tilde{\gamma}$ v prostoru nezávisle na sobě, pak jsou shodné jakožto podmnožiny prostoru právě tehdy, když jsou shodné i vzhledem k těmto parametrizacím, tedy když pro shodnost g platí $\tilde{\gamma} = g(\gamma)$.

Tato parametrizace odpovídá rovnoměrnému pohybu podél křivky. Jednoznačně se tak dá charakterizovat vlastností, že její tečný vektor γ' má vždy jednotkovou velikost. Ve zbytku této kapitoly uvažujeme parametrizaci obloukem u každé prostorové křivky implicitně.

Pohyblivý repér křivky

Užitečným nástrojem pro hledání invariantů prostorové křivky je tzv. *pohyblivý repér*. To je kolekce jednoho bodu a tří vektorů $F(t) = (\gamma(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, přičemž ke každému bodu křivky je tak přiřazena zvláštní báze. Protože je však pro přiřazení báze více způsobů, je naším cílem najít nějaké přirozené a invariantní vůči shodnostem, stejně jako tomu bylo v případě parametrizace obloukem. Sestrojíme-li pak tento repér na dvou shodných křivkách $\gamma, \tilde{\gamma} = g(\gamma)$ nezávisle na sobě, měl by tuto shodnost respektovat a splnit $\tilde{F} = g(F)$.



Obrázek 3. Shodnost pohyblivých repérů

Invarianty křivky lze pak nalézt v tzv. *invariantní matici* $\Omega(t)$, která zde hraje roli relativní změny kanonického repéru $F(t)$, tedy matice přechodu mezi repérem v daném bodě a jeho infinitezimální změnou (čili derivací)

$$F\Omega = F'.$$

Invariantní matici Ω v tomto textu věnujeme zvláštní pozornost, neboť jde o kompletní charakteristiku křivky nezávislou na shodnostech. Repér libovolné křivky F a repér shodné křivky $\tilde{F} = g(F)$ mají totiž stejnou invariantní matici Ω , což plyne z výpočtu

$$\tilde{F}\Omega = gF\Omega = gF' = \tilde{F}'.$$

Klasickým příkladem pro odvození repéru invariantního vůči shodnostem je tzv. *Frenetova–Serretova* konstrukce, která vhodně využívá derivací, kolmostí a velikostí, protože ty se ve shodných transformacích nemění. Konstrukci lze přirovnat k ortonormalizaci tzv. *oskulačního repéru křivky* $\alpha = (\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''')$, které však úspěšně docílíme jen za předpokladu, že je křivka jistým způsobem obecná, tj. že má repér α plnou dimenzi. Finální vektory repéru jsou pak tohoto tvaru:

$$u_1 := \gamma', \quad u_2 := u_1', \quad u_3 := u_1 \times u_2, \quad (1)$$

přičemž konkrétně lze výše zmíněného docílit pouze pro nenulový vektorový součin $\gamma' \times \gamma''$. Naopak, bodům s tímto součinem nulovým se říká *inflexní*.

Tvrzení 1. *Je-li křivka $\gamma(t) \in \mathbb{E}^3$ bez inflexních bodů parametrizována obloukem, její invariantní matice Ω je ve tvaru*

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa(t) & 0 \\ 0 & \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & 0 & \tau(t) & 0 \end{array} \right),$$

přičemž charakteristiky $\kappa > 0$ a τ označme jako křivost a torze křivky.

Důkaz. Ověříme tuto podobu matice Ω ze vztahu

$$(\gamma, u_1, u_2, u_3) \cdot \Omega = (\gamma', u'_1, u'_2, u'_3).$$

První řádek Ω je roven $(0, 0, 0, 0)$, jelikož γ je jako jediný bodem (čili má jako první souřadnici vždy 1) a na pravé straně jsou pouze vektory (čili všechny s první souřadnicí 0).

Zbytek matice Ω je pak vyplněn po sloupcích souřadnicemi derivovaných vektorů vzhledem k bázi (u_1, u_2, u_3) , přičemž vzhledem k eukleidovskému prostoru tyto souřadnice můžeme vyjádřit příslušnými skalárními součiny. Dostaneme tak rozšířenou Gramovu matici:

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma' \cdot u_1 & u'_1 \cdot u_1 & u'_2 \cdot u_1 & u'_3 \cdot u_1 \\ \gamma' \cdot u_2 & u'_1 \cdot u_2 & u'_2 \cdot u_2 & u'_3 \cdot u_2 \\ \gamma' \cdot u_3 & u'_1 \cdot u_3 & u'_2 \cdot u_3 & u'_3 \cdot u_3 \end{array} \right). \quad (2)$$

První sloupec pak plyne přímo z definice vektoru $u_1 := \gamma'$, v dalších sloupcích zdůvodníme nejprve nuly na diagonále pomocí derivace součinu

$$u_i \cdot u_i = 1 \quad \rightarrow \quad u_i \cdot u'_i = 0$$

a antisymetrii zbytku bloku derivací vztahu

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad \rightarrow \quad u_i \cdot u'_j + u'_i \cdot u_j = 0.$$

Zbývající nuly na vedlejší diagonále bloku lze nakonec zdůvodnit vztahem z (1):

$$u'_1 \cdot u_3 \approx u_2 \cdot u_3 = 0.$$

Zbytek matice je tedy zadán dvěma reálnými charakteristikami, které můžeme nazvat křivostí κ a torzí τ . $\square$

Porovnáme-li matici z tvrzení s Gramovou maticí z důkazu, můžeme vyčíst klasické definice těchto invariantů:

$$\kappa := u'_1 \cdot u_2 = \|u'_1\|, \quad \tau := u'_2 \cdot u_3.$$

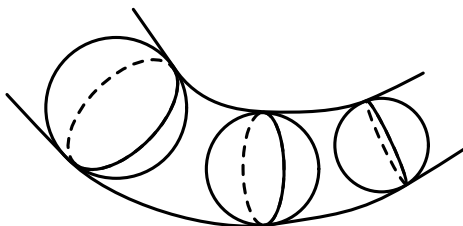
Geometrickým významem křivosti κ je dle [3] převrácená hodnota poloměru *oskulační kružnice*, tedy kružnice aproximující křivku v daném bodě. Torze τ pak určuje odchýlení od roviny této kružnice, tedy měří, jak moc křivka není rovinná.

Cvičení 1. *Jak vypadá prostorová křivka, jejíž křivost, torze a tudíž i celá invariantní matice jsou konstantní?*

Řešení této otázky bude podrobněji rozebráno v kapitole 5. Necháme-li se však vést pouhou intuicí, už nyní jej můžeme uhádnout. Má-li křivka nulovou křivost, jinými slovy není vůbec „křivá“, jde o přímku. Má-li křivka nenulovou konstantní křivost a nulovou torzi, je rovinná a všude stejně „křivá“, takže kružnice. Je-li nakonec křivka všude stejně křivá i odchýlená od oskulační roviny, jde o šroubovici.

4. INVARIANTY PŘÍMKOVÝCH PLOCH

Jak již bylo uvedeno, v této části se chystáme zobecnit provedenou konstrukci invariantního repéru a tu pak aplikovat na křivku v prostoru přímek, tedy přímkovou plochu. Na konci kapitoly pak nalezené invarianty porovnáme s již známými systémy invariantů pro přímkové plochy, a sice se Sanniovými a Kühnelovými. Nutno dodat, že kromě prostoru přímek platí zmíněná zobecnění i univerzálněji. Jednak v případě jiných metrických struktur, přičemž by šlo uvažovat například varietu sfér, kde by křivkou byla tzv. *kanálová plocha*, a jednak i v případě jiných homogenních struktur zadaných jinými grupami transformací, jako např. projektivní, afinní a jiné.



Obrázek 4. Kanálová plocha

V homogenním prostoru s obecnou grupou transformací G hraje roli pohyblivého repéru křivka transformací $c(t) \in G$, jež je tzv. *liftem* křivky $\gamma(t)$ do grupy G . To znamená, že v každém bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ jde o shodnost $c(t_0) : O \mapsto \gamma(t_0)$, kde O je počátek homogenního prostoru. V eukleidovském prostoru je takový lift totiž v jednoznačné korespondenci s výše zmíněným repérem $F(t)$, neboť pro bod $t_0 \in \mathbb{R}$ a repér $F(t_0)$ je $c(t_0) \in G$ jediná shodnost zobrazující standardní ortonormální repér E na repér $F(t_0)$:

$$c(t_0) : E = (O, e_1, e_2, e_3) \mapsto (\gamma(t_0), u_1(t_0), u_2(t_0), u_3(t_0)) = F(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Pojmy lift a repér budeme tedy v textu zaměňovat a společně značit jako $F(t)$.

Požadavkem k nalezení invariantní matice Ω je tedy nějaký kanonický způsob konstrukce liftu $F(t) \in G$, navíc s kanonickým parametrem t , které jsou invariantní vůči transformacím $\gamma \mapsto g\gamma, g \in G$. Matici pak můžeme v každém bodě křivky spočítat jako

$$\Omega = F^{-1} F'.$$

Poznámka 1. Matice $\Omega = F^{-1}F'$ je dokonce vektorem tečné algebry $\mathfrak{g} = T_e G$. V každém bodě $g = F(t_0) \in G$ jde totiž o obraz vektoru $F'(t_0)$ v tzv. Maurer-Cartanově formě

$$\omega_g = (L_{g^{-1}})_* : T_g G \rightarrow T_e G = \mathfrak{g}.$$

Pro grupu shodností v prostoru pak vektory algebry $\mathfrak{g}$ chápeme jako nepatrné pohyby prostoru ve smyslu translace + rotace. Odpovídající matice jsou pak tvaru

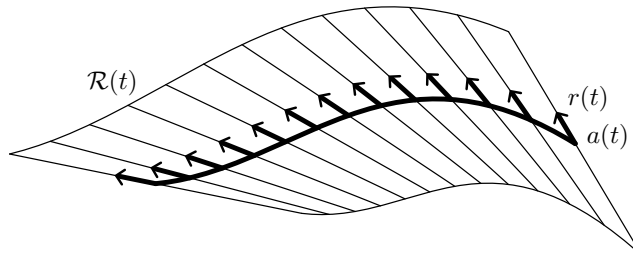
$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ w_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ w_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{array} \right),$$

kde první sloupec $(w_i)^T$ značí směr translace daného pohybu a antisymetrický blok B směr rotace. Ve skutečnosti blok B reprezentuje operátor, který otáčí daným vektorem kolem osy $(b_i)^T$, což lze zadat lineárním předpisem $u \mapsto (b_i)^T \times u$. Konkrétně pak složka b_i odpovídá rotaci kolem i -té souřadné osy. Nakonec, v prvním řádku matice jsou nuly, protože v matici shodnosti grupy G je první řádek konstantní.

Přímková plocha

Přímkovou plochou rozumíme plochu $\mathbf{x}(s, t)$, kterou lze vytvořit pohybem *tvořící přímky* po dané *řídící křivce*. Každým bodem takové plochy lze tedy vést přímku, která na ploše celá leží. Jelikož se nacházíme opět v metrickém prostoru s grupou shodností G , můžeme přímkovou plochu parametrizovat užitím řídící křivky $a = (1, a_1, a_2, a_3)^T$ a tzv. *směrové křivky* $r = (0, r_1, r_2, r_3)^T$ s jednotkovou velikostí:

$$\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = a(t) + sr(t), \quad \|r\| = 1. \quad (3)$$



Obrázek 5. Přímková plocha

Přímkové plochy můžeme rozdělit podle jisté míry degenerovanosti:

$$\dim\langle c', r, r' \rangle = \begin{cases} 1 \dots \text{singulární,} \\ 2 \dots \text{torzální neboli rozvinutelné,} \\ 3 \dots \text{netorzální neboli zborcené,} \end{cases}$$

přičemž dále v textu uvažujeme pouze přímkové plochy *necylindrické*, což jsou takové, jejichž směrová křivka splní $r' \neq 0$. Spolu s předpokladem $\|r\| = 1$ tato podmínka eliminuje přímkové plochy singulární.

Parametrizace (3) však není pro obecnou přímkovou plochu jednoznačná, neboť jako řídicí křivku lze uvážit libovolnou křivku protínající tvořící přímky. Pro necylindrickou přímkovou plochu lze však jednu řídicí křivku nalézt přirozeně s využitím metriky:

$$\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = c(t) + sr(t), \quad \|r\| = 1, \quad c' \cdot r' = 0. \quad (4)$$

Řídicí křivka $c(t)$ se v takovém případě nazývá *stričtní*, stejně jako její body. Stričtní bod $c(t_0)$ je na tvořící přímce $\mathcal{R}(t_0)$ právě jeden a lze nalézt vzorcem

$$c = a - \frac{a' \cdot r'}{r' \cdot r'} r,$$

odtud dále v textu uvažujeme řídicí křivku vždy stričtní a značme ji c .

Dle [1] se geometricky tento bod na dvou blízkých mimoběžných tvořících přímkách nachází v místech nejmenší vzdálenosti těchto přímek, čili v místě průsečíku mimoběžek s jejich společnou kolmicí.

Další nejednoznačnost se stričtně vzato objevuje v možné záměně směrové křivky za opačnou, tedy $r(t) \leftrightarrow -r(t)$. Tu si ale dovolíme neřešit, jelikož na systém invariantů nemá vliv.

Pohyblivý repér přímkové plochy

Dle výše uvedeného zobecnění postupu pro nalezení invariantní matice Ω se pokusme najít přirozenou konstrukci repéru $F(t)$ jakožto křivky shodností, která by dle odvození měla zobrazovat

$$F(t_0) : \mathcal{O} \mapsto \mathcal{R}(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Matice shodností tedy budeme hledat ve tvaru

$$F = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & r_1 & \cdot & \cdot \\ c_2 & r_2 & \cdot & \cdot \\ c_3 & r_3 & \cdot & \cdot \end{array} \right) \in G.$$

Zbytek matice F může být opět přirozeně doplněn ortonormalizací repéru $\alpha = (c, r, r', r'')$, podobně jako v případě prostorové křivky:

$$u_1 = r, \quad u_2 = \frac{r'}{\|r'\|}, \quad u_3 = u_1 \times u_2. \quad (5)$$

Kromě tohoto se ještě nabízí doplnit repér pomocí derivace křivky stričtní, tedy ortonormalizací repéru $\beta = (c, r, c', \cdot)$, přičemž na posledním vektoru při ortonormalizaci nezáleží. Zavedením stričtní křivky však dostáváme $c' \cdot r' = 0$, což s jednotkovou velikostí vektoru r dohromady zadává kolmost $r' \perp \langle c', r \rangle$. Vektor $u_2 \approx r'$ bychom tedy dostali jako třetí vektor ortonormalizované báze a výsledný repér by tak byl totožný s výše zmíněným repérem $F = (c, u_1, u_2, u_3)$ až na prohození vektorů.

Posledním krokem bude přidat požadavek na jednoznačnost parametru t , přičemž zde máme dvě přirozené možnosti. Buďto parametrizovat obloukem strikční křivku $c(t)$ nebo směrovou křivku $r(t)$.

Sanniovy invarianty

Uvažme nejprve oblouk vzhledem ke strikční křivce $c(t)$, čili $\|c'(t)\| = 1$, a pokusme se nalézt tvar invariantní matice Ω_S vzhledem k repéru $F = (c, u_1, u_2, u_3)$. Aby byla tato parametrizace možná, musíme se omezit pouze na přímkové plochy s regulární strikční křivkou. Těto podmínce nevyhoví obecně plochy kuželové.

Tvrzení 2. *Je-li dána přímková plocha $\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = c(t) + sr(t)$ s regulární strikční křivkou $c(t)$ parametrizovanou obloukem, její invariantní matice Ω_S vzhledem k výše zmíněnému repéru F je ve tvaru*

$$\Omega_S = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \cos(\sigma(t)) & 0 & -\kappa(t) & 0 \\ 0 & \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ \hline \sin(\sigma(t)) & 0 & \tau(t) & 0 \end{array} \right), \quad (6)$$

přičemž charakteristiky $\kappa > 0, \tau$ a σ označme jako křivost, torze a strikce přímkové plochy.

Důkaz. Ověříme opět tuto podobu matice Ω_S ze vztahu

$$(c, u_1, u_2, u_3) \cdot \Omega_S = (c', u'_1, u'_2, u'_3),$$

ze kterého stejně jako v důkazu tvrzení 1 plyne tvar rozšířené Gramovy matice:

$$\Omega_S = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c' \cdot u_1 & u'_1 \cdot u_1 & u'_2 \cdot u_1 & u'_3 \cdot u_1 \\ c' \cdot u_2 & u'_1 \cdot u_2 & u'_2 \cdot u_2 & u'_3 \cdot u_2 \\ c' \cdot u_3 & u'_1 \cdot u_3 & u'_2 \cdot u_3 & u'_3 \cdot u_3 \end{array} \right). \quad (7)$$

První sloupec zde zdůvodníme nulovostí součinu $c' \cdot u_2 \approx c' \cdot r'$ a jednotkovou velikostí vektoru c' , díky čemuž tento vektor můžeme vyjádřit jako

$$c' = \cos(\sigma)u_1 + \sin(\sigma)u_3.$$

Invariant σ , který nazveme *strikcí*, označuje odchylku tečného vektoru c' od vektoru u_1 a tedy od tvořící přímky. Zbytek důkazu je pak analogický s Frenetovou–Serretovou konstrukcí použitou v důkazu tvrzení 1. $\square$

Invarianty, které lze vzhledem k důkazu definovat jako

$$\kappa := u'_1 \cdot u_2 = \|u'_1\|, \quad \tau := u'_2 \cdot u_3,$$

nazvěme také *křivostí* a *torzí* pro zachování významu ve Frenetové–Serretové konstrukci. Křivkou, kterou však tyto charakteristiky tradičně popisují, je tzv. *integrální křivka* směrové křivky r , tj. křivka eukleidovského prostoru $\gamma(t)$, jejíž tečným vektorem v každém bodě je směr $\gamma'(t) = r(t)$.

Zmíněný ortonormální repér, stejně tak jako systém invariantů, popsal G. Sannia v roce 1925, jak uvádí publikace [1], která je pro tento text velkou inspirací.

Invarianty jsou v oné knize odvozené podobným způsobem, ale z lehce odlišného úhlu pohledu. Mimo to jsou zde vyjádřeny také charakteristiky vnitřní geometrie plochy jako například Gaussova křivost pomocí právě tohoto systému invariantů. Díky tomu lze kupříkladu strikční bod charakterizovat jako bod tvořící přímky s minimální (tedy nejvíce zápornou) Gaussovou křivostí nebo zdůvodnit, proč je tato křivost pro torzální plochy vždy nulová a pro netorzální záporná.

Zajímavostí také je, že v popisu vnitřní geometrie přímkové plochy se vyskytuje pouze křivost a strikce, torze oproti tomu popisuje až vložení dané plochy do okolního eukleidovského prostoru.

Cvičení 2 (*Invarianty hyperbolického paraboloidu*). Uvažme plochu zadanou rovnicí

$$z = xy,$$

jejíž parametrizaci $\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = a(t) + sr(t)$ lze zadat křivkami

$$a(t) = (1, t, 0, 0)^T, \quad r(t) = \frac{(0, 0, 1, t)^T}{\|(0, 0, 1, t)^T\|}$$

a spočítejme uvedeným postupem Sanniovy invarianty. Řídící křivkou $a(t) = c(t)$ je zde přímka, která je již strikční, neboť platí $a' \cdot r' = 0$, a je již parametrizována obloukem, čili $\|c'\| = 1$. Zbývá tedy doplnit repér $F = (c, r, \cdot, \cdot)$ dle vzorců (5):

$$F = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & -\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & 0 \end{array} \right) \in G,$$

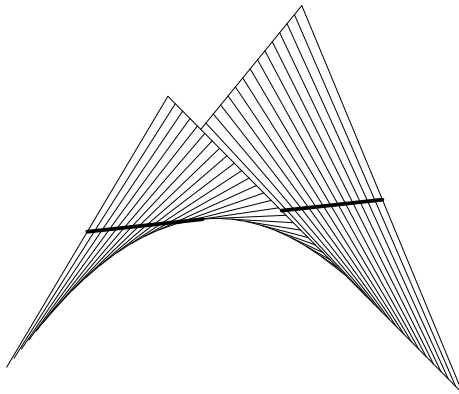
$$\Omega_S = F^{-1}F' = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Tato plocha má tedy konstantní strikci $\sigma = \pi/2$, takže všechny tvořící přímky jsou kolmé na řídící přímku. Nenulová strikce také znamená, že jde o plochu netorzální. Její křivost je pak nekonstantní a torze nulová, což je typické pro tzv. konoidy, tj. přímkové plochy, jejíž všechny tvořící přímky jsou rovnoběžné s nějakou rovinou.

Kühnelovy invarianty

V této sekci rozeberme druhou přirozenou parametrizaci, a to obloukem vzhledem k řídící křivce. Pro odlišení píšme nový parametr $\mathbf{t}$ namísto t a derivaci podle něj značme tečkou. Nová parametrizace nechť tedy splňuje $\|\dot{r}(\mathbf{t})\| = 1$. Výhodou této konstrukce je, že můžeme opět uvažovat i přímkové plochy se strikční křivkou singulární, tedy plochy kuželové. Uvažovaný repér je tedy tvaru

$$u_1 = r, \quad u_2 = r', \quad u_3 = u_1 \times u_2.$$



Obrázek 6. Hyperbolický paraboloid

Tvrzení 3. Je-li dána přímková plocha $\mathcal{R}(\mathfrak{s}) = \mathbf{x}(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = c(\mathfrak{t}) + \mathfrak{s}r(\mathfrak{t})$ se strikční řídicí křivkou $c(\mathfrak{t})$ a se směrovou křivkou $r(\mathfrak{t})$ parametrizovanou obloukem, její invariantní matice Ω_K vzhledem k repéru $F = (c, u_1, u_2, u_3)$ definovaném výše je ve tvaru

$$\Omega_K = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathcal{F}(\mathfrak{t}) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathcal{J}(\mathfrak{t}) \\ \lambda(\mathfrak{t}) & 0 & \mathcal{J}(\mathfrak{t}) & 0 \end{array} \right),$$

přičemž charakteristiky $\mathcal{F}, \mathcal{J}$ a λ označme jako Kühnelovy invarianty.

Důkaz. Důkaz bude v tomto případě velice podobný důkazu tvrzení 2 o Saniových invariantech. Na rozdíl od něj však tečný vektor strikční křivky $\dot{c}$ nemá jednotkovou velikost, a tak je třeba jej vyjádřit pomocí dvou kvantit

$$\dot{c} = \mathcal{F}u_1 + \lambda u_3$$

a vektor u_2 je přímo roven derivaci $\dot{r} = \dot{u}_1$, z čehož plyne součin

$$\dot{u}_1 \cdot u_2 = \dot{r} \cdot \dot{r} = 1.$$

□

Tyto invarianty jsme našli pouze v knize [2], proto jsme je nazvali po W. Kühnelovi. Autor zde však nekonstruuje repér, nýbrž je zavádí rovnou vzorci:

$$\mathcal{F} := \dot{c} \cdot r, \quad \lambda := \det(\dot{c}, r, \dot{r}), \quad \mathcal{J} := \det(r, \dot{r}, \ddot{r}).$$

Pro jejich ztotožnění s prvky naší matice počítejme

$$\mathcal{F} := \dot{c} \cdot r,$$

$$\lambda := \det(\dot{c}, r, \dot{r}) = \dot{c} \cdot (r \times \dot{r}) = \dot{c} \cdot (u_1 \times u_2) = \dot{c} \cdot u_3,$$

$$\mathcal{J} := \det(r, \dot{r}, \ddot{r}) = \ddot{r} \cdot (r \times \dot{r}) = \dot{u}_2 \cdot (u_1 \times u_2) = \dot{u}_2 \cdot u_3,$$

přičemž tyto rovnosti postupně zdůvodníme determinantem jakožto smíšeným součinem, definicí vektorů u_1, u_2 a u_3 a nakonec nahlédnutím do odpovídající Gramovy matice tvaru (7).

Cvičení 3 (*Invarianty Plückerova konoidu*). Uvažme plochu

$$\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = a(t) + sr(t),$$

$$a(t) = (1, 0, 0, \sin(2t))^T, \quad r(t) = (0, \cos(t), \sin(t), 0)^T$$

a spočítejme uvedeným postupem Kühnelovy invarianty. Křivka $a(t) = c(t)$ je opět přímkou, která je již strikční, neboť platí $\dot{a} \cdot \dot{r} = 0$, a směrová křivka je již parametrizována obloukem, čili $\|\dot{r}\| = 1$. Repér $F = (c, r, \cdot, \cdot)$ tedy dle vzorců (5) doplníme

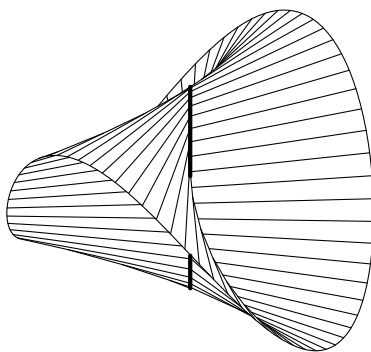
$$F = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ \sin(2t) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in G,$$

$$\Omega_K = F^{-1}\dot{F} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\cos(2t) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

Pro Kühnelovy invarianty tedy platí

$$\mathcal{F} = 0, \quad \lambda = 2\cos(2t), \quad \mathcal{J} = 0$$

Z jejich tvaru můžeme opět vyčíst jisté vlastnosti. Nulovost $\mathcal{F} = \dot{c} \cdot r$ znamená, že tvořící přímky jsou opět kolmé na řidici, nenulovost $\lambda = \det(\dot{c}, r, \dot{r})$ říká, že plocha je netorzální, a nulovost $\mathcal{J} = \det(r, \dot{r}, \ddot{r})$, že směrová křivka je planární, tedy že tvořící přímky jsou všechny opět rovnoběžné s nějakou rovinou a plocha je tak oprávněně nazvaná konoidem.



Obrázek 7. Plückerův konoid

Na závěr ještě odvozené systémy invariantů porovnejme mezi sebou, a to pomocí tzv. *reparametrizace* $f : t \mapsto \mathbf{t}$. Vzhledem k té zde pouze stručně naznačíme výpočty

$$\kappa = \|r'\| = f' \|\dot{r}\| = f',$$

$$\Omega_S = F^{-1}F' = f'(F^{-1}\dot{F}) = f'\Omega_K,$$

ze kterých odvodíme vztahy

$$\mathcal{F} = \frac{\cos(\sigma)}{\kappa}, \quad \lambda = \frac{\sin(\sigma)}{\kappa}, \quad \mathcal{J} = \frac{\tau}{\kappa}.$$

5. HOMOGENNÍ PŘÍMKOVÉ PLOCHY

Homogenní křivky v homogenních prostorech

V této sekci si připomeneme Cvičení 1, jenž řeší otázku křivek s invariantní maticí Ω konstantní, přičemž tyto křivky nazveme *homogenními*.

V prvních odstavcích textu jsme definovali homogenní prostor jako prostor s tranzitivní akcí nějaké grupy G . Homogenní podprostor, zejména křivku, pak definujeme jako podprostor, na kterém působí tranzitivně nějaká podgrupa $H \subseteq G$. V případě křivky navíc díky libovolné volbě počátku O homogenního prostoru můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je tímto počátkem právě krajní bod homogenní křivky $O := \gamma(0)$. Díky tranzitivitě podgrupy H pak existuje jednoparametrická podgrupa $F(t) \in H, F(t) : O \mapsto \gamma(t)$, která jednak plní funkci liftu křivky γ (a tak je opět můžeme zaměňovat) a jednak tuto křivku stabilizuje, čili zobrazí samu na sebe, a to vztahem:

$$F(t) : \gamma(s) \mapsto \gamma(t+s).$$

Křivka γ je tedy shodná sama se sebou skrze třídu shodností, které danou křivku posouvají po celé své délce. Díky invariantnosti matice Ω to znamená, že je tato matice po celé délce křivky opravdu konstantní. Navíc, zvolíme-li křivku $F(t) \in H$ tak, aby procházela neutrálním prvkem $F(0) = e \in G$ (čehož lze případně docílit jinou volbou $\tilde{F}(t) := F(t)F(0)^{-1} \in A$), můžeme invariantní matici Ω vyjádřit jako:

$$\Omega = \Omega(0) = F(0)^{-1}F'(0) = F'(0).$$

Máme-li naopak zadanou matici Ω , jež je dle Poznámky 1 vektorem tečného prostoru $\mathfrak{g} = T_e G$, můžeme pomocí *exponenciálního zobrazení* naopak nalézt jednoparametrickou podgrupu

$$F(t) = \exp(t\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\Omega)^k,$$

jejíž invariantní matice je právě Ω .

Homogenní křivka obecně nemusí mít jedinou jednoparametrickou stabilizační podgrupu. Uvažme například přímku, která je stabilizována jednak translačním pohybem v jejím směru, ale také řadou pohybů šroubových.

Již máme dostatek nástrojů pro kompletní řešení zmíněného Cvičení 1. Pro konstantní matici Ω tvaru

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & \tau & 0 \end{array} \right)$$

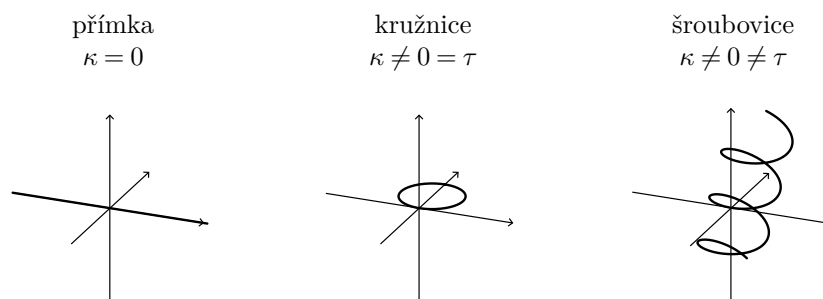
nejprve spočítejme explicitní předpis repéru $F(t) = \exp(t\Omega) \in G$ a křivku γ pak vyjádříme zobrazením $\gamma(t) := F(t)(O)$, tedy jako první sloupec repéru. Pro jednoduchost matice Ω , zejména její vysoký počet 0, lze křivku vyjádřit vcelku kompaktně:

$$\gamma(t) := \left(1, \frac{\tau^2 t n + \sin(nt) \kappa^2}{n^3}, \frac{\kappa(1 - \cos(nt))}{n^2}, \frac{\kappa \tau (nt - \sin(nt))}{n^3} \right)^T, \quad n := \sqrt{\kappa^2 + \tau^2},$$

případně je-li $\kappa = \tau = 0$:

$$\gamma(t) := (1, t, 0, 0)^T.$$

Všimněme si, že tento předpis dává dobrý smysl i v případě nulovosti daných konstant, přestože je to striktně vzato proti podmínkám uvedené konstrukce invariantní matice. Pro $\kappa = 0$ nám totiž vyjde přímka, což je křivka, jejíž každý bod je inflexní. Repér této přímky se navíc buď podél ní pouze posouvá (při $\tau = 0$) nebo šroubuje (při $\tau \neq 0$). Pro $\kappa \neq 0$ nám pak v závislosti na torzi τ vyjde kružnice nebo šroubovice, jak je uvedeno v tabulce 1.



Tabulka 1. Homogenní prostorové křivky

Klasifikace homogenních přímkových ploch

V této kapitole naznačme možný způsob klasifikace homogenních přímkových ploch pomocí právě zavedených nástrojů homogenního prostoru.

Upozorníme, že v tomto textu se zabýváme přímkovými plochami, které odpovídají homogenním křivkám na varietě přímek, tj. které mají alespoň jednoparametrickou grupu symetrií. Rozlišme však tuto kategorii od přímkových ploch, které jsou současně homogenními plochami v tom smyslu, že mají alespoň dvojparametrickou grupu symetrií tranzitivní po celé ploše. Ty jsou totiž pouze částí námi uvažovaných homogenních ploch.

Dle předchozí sekce je výhodné, aby pohyblivý repér dané homogenní křivky procházel identitou $F(0) = e \in G$. Zabývejme se proto otázkou, kdy jsou v homogenním prostoru shodné dvě homogenní křivky procházející počátkem, tj. kdy nastane

$$\bar{\gamma} = h\gamma, \quad h \in G_{\mathcal{O}}^2,$$

přičemž připomeňme, že $G_{\mathcal{O}}^2$ jsou právě shodnosti stabilizující počáteční přímku $\mathcal{O}$. Pro tento vztah lze odvodit postačující podmínku

$$\bar{\Omega} = h\Omega h^{-1}, \quad (8)$$

neboť pak platí

$$\bar{\gamma} = [\exp(t\bar{\Omega})G_{\mathcal{O}}^2] = [\exp(th\Omega h^{-1})G_{\mathcal{O}}^2] = [h\exp(t\Omega)h^{-1}G_{\mathcal{O}}^2] = h\gamma.$$

Tato podmínka není v obecné geometrii nutná, v případě $\mathbb{E}^3$ však její nutnost plyne z tzv. *reduktivity* algebry $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathfrak{so}(3)$. Pro více detailů odkažme na [5].

Chceme-li tedy rozlišit třídy shodných homogenních přímkových ploch, stačí rozlišit třídy vektorů Ω tečné algebry $\mathfrak{g}$ navzájem shodných vzhledem k uvedené adjunkci, přičemž tvar obecné matice Ω jsme zdůvodnili už v Poznámce 1.

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ w_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ w_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{g}, \quad h = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{32} & r_{33} \end{array} \right) \in G_{\mathcal{O}}^2$$

Zvolíme-li konkrétní transformaci $h \in G_{\mathcal{O}}^2$ s těmito koeficienty:

$$a_1 := \frac{b_3 w_2 - b_2 w_3}{N^2}, \quad R := \frac{1}{N} \begin{pmatrix} b_3 & -b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad N := \sqrt{b_2^2 + b_3^2},$$

můžeme každý vektor třídy adjunkce upravit do následujícího čtyřparametrického tvaru

$$h\Omega h^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -N & 0 \\ 0 & N & 0 & -b_1 \\ \frac{b_2 w_2 + b_3 w_3}{N} & 0 & b_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -\tilde{b}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_3 & 0 & -b_1 \\ \tilde{w}_3 & 0 & b_1 & 0 \end{array} \right) = \tilde{\Omega}. \quad (9)$$

Protože matici Ω lze jakožto matici infinitezimální změny pohybu $F'(t)$ rozdělit na translační část v prvním sloupci a rotační část ve zbylých sloupcích, je výhodné pojmenovat only čtyři parametry takto:

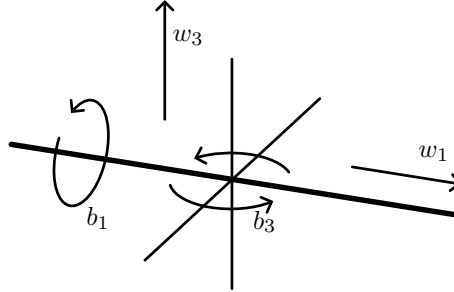
w_1 – podélná translace

w_3 – příčná translace

b_1 – podélná rotace

b_3 – příčná rotace

Dosadíme-li tuto matici do exponenciálního zobrazení, získáme právě homogenní pohyblivý repér $F(t) = \exp(t\tilde{\Omega})$ a obvyklým způsobem pak i odpovídající

Obrázek 8. Význam parametrů w_1, w_3, b_1, b_3

homogenní přímkovou plochu

$$F(t)(\mathcal{O}) = \mathcal{R}(t) = c(t) + sr(t)$$

již můžeme pro $b_1 = b_3 = 0$ explicitně vyjádřit:

$$c(t) := (1, tw_1, 0, tw_3)^T, \quad r(t) := (0, 1, 0, 0)^T$$

a pro $n := \sqrt{b_1^2 + b_3^2} > 0$:

$$c(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_3 \sin(nt)(b_3 w_1 - b_1 w_3)}{n^3} + \frac{tb_1(b_1 w_1 + b_3 w_3)}{(-1 + \cos(nt))(b_1 w_3 - b_3 w_1)} \\ \frac{b_1 \sin(nt)(b_1 w_3 - b_3 w_1)}{n^3} + \frac{tb_3(b_1 w_1 + b_3 w_3)}{n^2} \end{pmatrix}, \quad r(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos(nt)b_3^2 + b_1^2}{b_3 \sin(nt)} \\ \frac{(1 - \cos(nt))b_1 b_3}{n^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Řídicí křivka $c(t)$ je homogenní křivkou v $\mathbb{E}^3$, neboť je sama o sobě také zadána homogenním pohyblivým repérem $F(t)$. Křivka navíc v rámci plochy splňuje i podmínku strikční křivky, neboť první dva sloupce matice v (9) představují na sebe kolmé vektory c' a r' . Podobně je i směrová křivka $r(t)$ homogenní křivkou, a to na jednotkové sféře, tedy obecně kružnicí.

V souhrnu dostáváme klasifikaci homogenních přímkových ploch, kde každá třída je reprezentována čtveřicí $(w_1, w_3, b_1, b_3 \geq 0) \in \mathbb{R}^4$. Stejnou třídu však reprezentuje i čtveřice vynásobená společným násobkem λ , neboť tato záměna pouze konstantně přeškáluje parametr

$$F(t) = \exp(t\tilde{\Omega}) = \exp(\bar{t}\lambda\tilde{\Omega}).$$

Další záměny určující stejnou třídu pak najdeme už pouze u ploch cylindrických, jež jsou charakterizovány podmínkou $b_3 = 0$, jak uvidíme později.

Tvrzení 4. Každá shodnostní třída necylindrických homogenních přímkových ploch je jednoznačně určena čtveřicí $(w_1, w_3, b_1, b_3 > 0) \in \mathbb{R}^4$ až na záměnu

$$(w_1, w_3, b_1, b_3) \leftrightarrow \lambda(w_1, w_3, b_1, b_3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Navíc, zvolíme-li takovou společnou škálu λ , že platí $w_1^2 + w_3^2 = 1$, získáme rovnou čtveřici Sanniových invariantů dané homogenní přímkové plochy. Podobně, naškálujeme-li parametry tak, aby platilo $b_3 = 1$, získáme přímo invarianty Kühnelovy. Obecně jsou pak vztahy následující:

$$\kappa = \frac{b_3}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}}, \quad \tau = \frac{b_1}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}}, \quad \cos(\sigma) = \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}}, \quad \sin(\sigma) = \frac{w_3}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}},$$

$$\mathcal{F} = \frac{w_1}{b_3}, \quad \lambda = \frac{w_3}{b_3}, \quad \mathcal{J} = \frac{b_1}{b_3}.$$

Pomocí výše uvedených explicitních parametrizací dokážeme opět vyjádřit větší třídu ploch, než ke kterým umíme dopočítat Sanniovy a Kühnelovy invarianty. Bez překážek totiž vyjádříme homogenní plochu naprosto libovolnou, zejména i plochu cylindrickou, kuželovou nebo i singulární.

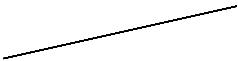
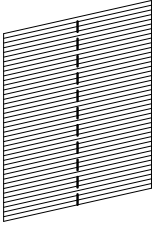
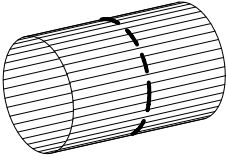
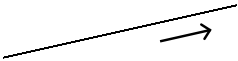
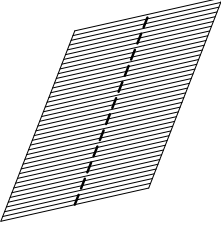
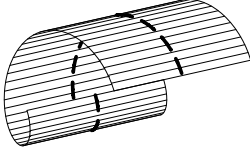
Cylindrická homogenní plocha je zde určena podmínkou $b_3 = 0$, neboť z předchozích vzorců plyne $b_3 \approx \kappa$ a z tvrzení 2 o Sanniových invariantech $\kappa = \|r'\|$. Kuželová plocha je pak zadána podmínkou $w_1 = w_3 = 0$, neboť tehdy je plocha tvořena pouze rotacemi přímky kolem počátku a žádnými translacemi. Nakonec, singulární je přímková plocha tehdy, je-li splněno $b_3 = w_3 = 0$. Pak totiž na tvořící přímku působí pouze podélná translace a rotace, což jsou pohyby, které tuto přímku ponechávají na místě.

Všechny uvedené vlastnosti a ještě některé další lze získat i dosazením nebo pohledem na předpis (10), což nám dává tento přehled podmínek:

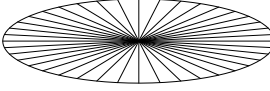
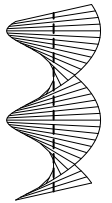
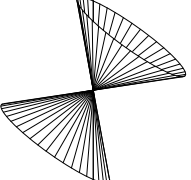
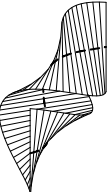
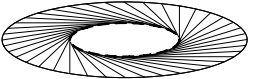
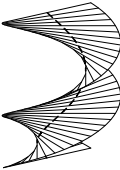
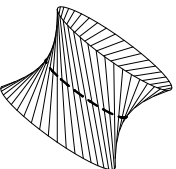
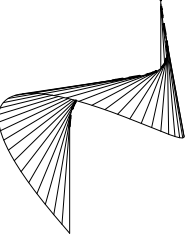
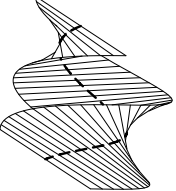
$b_3 = w_3 = 0$	singulární „plocha“
$b_3 \approx \kappa = \ r'\ = 0$	cylindrická plocha
$w_1 = w_3 = 0$	řídící křivkou je bod $\rightarrow$ kuželová plocha
$b_3 w_1 = b_1 w_3$	řídící křivkou je přímka
$b_1 w_1 = -b_3 w_3$	řídící křivkou je kružnice
$b_1 b_3 = 0$	tvořící přímky rovnoběžné s rovinou $\rightarrow$ konoidální plocha
$b_1 = 0$	tvořící přímky kolmé na řídící křivku

Další dělení tříd zejména podle nulovosti parametrů w_1, w_3, b_1, b_3 můžeme vidět v tabulkách 2 a 3, avšak mějme na paměti, že různé kombinace nám mohou dát stejnou plochu, přičemž záleží na úhlu pohledu. Kupříkladu rovinu jakožto podmnožinu prostoru získáme více kombinacemi, kdežto rozlišujeme-li různé přímkové plochy ve smyslu křivek na varietě přímek, tedy plochy s jinými uskupeními tvořících přímek, ztotožníme pouze roviny rovnoběžek s různými řídícími křivkami, podobně je tomu u kombinací zadávajících válce.

V tabulce 3 mimo jiné dochází k nutnosti ještě jednoho rozdělení, jelikož pouze nulovostmi parametrů od sebe nedokážeme odlišit obecnou šroubovou plochu od rotačního hyperboloidu, a tak tyto dvě plochy musíme rozlišit tvarem strikční křivky. Důsledkem však také je neexistence třídy označené „N/A“, neboť zadaným podmínkám nevyhoví žádné řešení.

cylindrické přímkové plochy $b_3 = 0$	
singulární $w_3 = 0$	regulární $w_3 \neq 0$
$w_1 = 0 = b_1$  přímka	 rovina rovnoběžek
$w_1 = 0 \neq b_1$  přímka	 válec
$w_1 \neq 0 = b_1$  přímka	 rovina rovnoběžek
$w_1 \neq 0 \neq b_1$  přímka	 válec

Tabulka 2. Třídy cylindrických homogenních přímkových ploch

necylindrické přímkové plochy $b_3 > 0$	
torzální $w_3 = 0$	netorzální $w_3 \neq 0$
$w_1 = 0 = b_1$  rovina různoběžek	 helikoid
$w_1 = 0 \neq b_1$  kužel	 šroubová plocha kolmic
$w_1 \neq 0 = b_1$  plocha tečen kružnice	 šroubový konoid
$w_1 \neq 0 \neq b_1$ $b_1 w_1 = -b_3 w_3$ N/A	 rotační hyperboloid
$w_1 \neq 0 \neq b_1$ $b_1 w_1 \neq -b_3 w_3$  plocha tečen šroubovice	 obecná šroubová plocha

Tabulka 3. Třídy necylindrických homogenních přímkových ploch

6. DALŠÍ HOMOGENNÍ PROSTORY

Závěrem textu uvedeme ještě několik příkladů neeukleidovských homogenních prostorů, ve kterých by šlo s jistými úpravami repér a invariantní matici také konstruovat. Velkou inspirací pro tento text byl článek [4], který podobným postupem konstruuje invarianty projektivní. Obecně je možné každý takový prostor kompletně popsat pouze zadáním grupy transformací G a stabilizátoru jakéhosi počátku H , neboť nosná množina pak může být opět ztotožněna s množinou levých tříd $M \cong G/H$. Nejtypičtějšími homogenními geometriemi pak mohou být například tyto:

nosná množina	grupa symetrií	název geometrie
standardní $\mathbb{R}^n$	afinní transformace	afinní
projektivní $\mathbb{RP}^n$	kolineace	projektivní
sféra S^n	konformní transformace	konformní
hyperbolický prostor H^n	Möbiovy transformace	hyperbolická

Různé geometrie na stejné nosné množině navíc může být často užitečné nějakým způsobem srovnávat, což nám Kleinův homogenní přístup také může umožnit. Na reálné, popřípadě projektivní rovině tak můžeme srovnat geometrii projektivní, afinní a eukleidovskou. Tuto rovinu tak můžeme ztotožnit s prostorem levých tříd G/H , přičemž grupu G budeme nahrazovat postupně grupou projektivních, afinních a eukleidovských transformací a podgrupu H odpovídajícími stabilizátory počátečního bodu O . Pro tyto grupy platí následující inkluze, která je již prvním jakýmsi uspořádáním těchto geometrií:

$$G^E \subseteq G^A \subseteq G^P \quad (11)$$

Další vztahy mezi geometriemi můžeme vidět například v otázkách klasifikačních. V textu jsme rozřazovali do tříd homogenní křivky, zde si porovnání ukažme na známějším příkladu klasifikace kuželoseček.

Kuželosečka q je v každé geometrii ekvivalentní kuželosečce r , jestliže je jedna obrazem druhé v nějaké transformaci $g \in G$. Zadáme-li tyto kuželosečky pomocí matic ve standardních souřadnicích, splňují tyto matice $Q = g^T R g$, jak je vidět ze zápisu

$$gq = \{gx \in \mathbb{R}^2, x^T Q x = 0\} = \{gx \in \mathbb{R}^2, (gx)^T R g x = 0\} = r.$$

Inkluze grup (11) nám pak říkají, že každé dvě eukleidovsky ekvivalentní kuželosečky jsou ekvivalentní i afinně a každé dvě afinně ekvivalentní jsou ekvivalentní i projektivně. Naopak to být však nemusí, jak ukazuje následující tabulka:

ekvivalence	hyperbola a elipsa	různě velké elipsy	shodné elipsy
projektivní	✓	✓	✓
afinní		✓	✓
eukleidovská			✓

Tuto skutečnost můžeme pozorovat i na úrovni invariantů, přičemž projektivním invariantem je tu nulovost determinantu matice kuželosečky, afinním nulovost nebo

znaménko jeho kvadratického subdeterminantu a eukleidovským samotný subdeterminant. Samozřejmě pak invariant vyšší geometrie je zároveň invariantem každé nižší, ale naopak to být nemusí.

REFERENCE

- [1] H. Pottman, J. Wallner: *Computational Line Geometry*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [2] W. Kühnel: *Differential Geometry* Student Mathematical Library, Volume 77, American Mathematical Society, 2015.
- [3] J. Šilhan, V. Žádník: *O křivkách a křivostech*, Kvaternion (2018), No. 1–2, 25–36.
- [4] B. Doubrov, I. Zelenko: *Geometry of curves in generalized flag varieties*, Transformation Groups, 2013, Volume 18, pp. 361–383.
- [5] R. V. Gamkrelidze, D. V. Alekseevskij, V. V. Lychagin, A. M. Vinogradov: *Geometry I: Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 28, Springer, 2010.

Matouš Trnka, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita, Kotlářská 267/2, 611 37 Brno, Česká republika,
e-mail: trnkam@math.muni.cz

