

Milé čtenářky, milí čtenáři,

asi znáte matematický vtip o tom, jak se na pláži povalují funkce a užívají si sluníčka, když se znenáhla objeví derivace a funkce v panice prchají, až na netečnou exponenciálu e^x , kterou varování „uteč, derivace tě zderivuje!“ nechává klidnou — dokud se nedozví, že derivace derivuje podle y . Ten by nám mohl naskočit, když se podíváme na téma prvního článku nejnovějšího Kvaternionu: nejen derivace, ale i integrál může překvapit tím, jak a co integruje. Jak ukazuje v zajímavém textu Dominik Trnka, integrovat lze bez zábran i algebraické struktury.

Následující článek Matouše Trnky pojednává o metrických vlastnostech přímkových ploch. Hezká geometrie přináší svěží pohled na klasické úlohy.

Ve třetím článku se Jiří Šremr vrací k Floquetově teorii, kterou představil v dvojčísle našeho časopisu v roce 2022. Tento elegantní nástroj pro kvalitativní analýzu diferenciálních rovnic tentokrát aplikuje v problematice Ljapunovské stability.

Studentské práce otevírá Vendula Kučerová: zabývá se cyklickým pronásledováním. Klasickou úlohou je, že tři psi, umístění ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka začnou současně pronásledovat konstantní rychlostí svého souseda, až jejich dráhy vytvoří logaritmickou spirálu. Autorka nám v článku představuje problém čtyř brouků.

Druhou studentskou prací čísla je článek Jana Prokopa, který ukazuje, jak lze užitím diferencí vybudovat aparát obdobný diferenciálnímu počtu.

Posledním příspěvkem nového Kvaternionu je zajímavá úloha z internetové matematické soutěže MATHING o skládání rovnoběžnostěnů z rozřezaného kvádru. Správným řešením nás s jistotou provází Viera Štoudková Růžicková.

Milé čtenářky a milí čtenáři, zbývá vám popřát, aby pro vás četba byla nejen příjemnou zábavou, ale i pozvánkou k dobrodružství: ať vás Kvaternion inspiruje k tomu, abyste se sami pustili do nějakého zajímavého zkoumání a nechali se vtáhnout do světa krásných a nezdědka překvapivých matematických souvislostí.

Miroslav Kureš

JAK INTEGROVAT PŘIROZENÁ ČÍSLA, STROMY A JINÉ OPERÁDY

DOMINIK TRNKA

ABSTRAKT. Představíme čtenáři myšlenku algebraické integrace a její obohacenou verzi. Integraci provedeme názorně na jednoduchých příkladech, tj. zintegrujeme soubor množin, orientovaný multigraf, uspořádaný monoid přirozených čísel a operádu planárních stromů.

ÚVOD

Pod pojmem *integrace* si čtenář pravděpodobně vybaví symbol $\int$, graf nějaké spojité funkce f a způsob, jakým lze spočítat obsah pod tímto grafem na daném intervalu $I = [a, b]$. Obsah zpravidla určujeme nalezením primitivní funkce F a dosazením do formule

$$\int_I f = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ideově bychom mohli proces integrace popsat tak, že pro zadaný objekt f nalezneme nový objekt F , který obsahuje informaci o původním objektu (platí totiž $F' = f$), a zároveň nám integrace umožňuje se o původním objektu dozvědět něco víc. Úkolem tohoto textu je seznámit čtenáře s obdobným principem ve světě algebraických struktur. Poznamenejme, že slovo *integrace* se běžně používá i mimo matematiku, pochází z latinského *integer*, tj. *celý*, a mohli bychom ho tak překládat jako *scelovat*, neboli *činit celistvým*. Necháváme na čtenáři, aby si tento význam propojil s procesem integrace funkcí. Věříme, že v algebraickém kontextu níže bude patrné, proč jsme zvolili právě tento výraz, přestože se nejedná o standardní terminologii.

Než představíme integraci v algebraickém kontextu, je nutné vysvětlit, co považujeme za algebraickou strukturu. Typicky máme na mysli nosnou množinu A spolu s operacemi

$$\alpha: A \times \cdots \times A \rightarrow A,$$

splňujícími určité rovnosti. Přirozenými příklady jsou samotná množina (tj. triviální algebraická struktura), pologrupa, monoid, grupa, vektorový prostor, a jiné.

2020 MSC. Primární 05C05,18D30;18M60;18N10.

Klíčová slova. Algebraická integrace; kategoriální operáda; operadická fibrace; Grothendieckova konstrukce; stromy.

Připomeňme čtenáři algebraickou strukturu zvanou pologrupa. Pologrupa je množina P spolu s binární operací

$$\mu: P \times P \rightarrow P,$$

splňující rovnost

$$\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$$

pro libovolná $a, b, c \in P$. V infixové notaci $\mu(a, b) = a \cdot b$ má rovnice známý tvar

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Obecněji můžeme strukturou rozumět soubor množin $\{A_s\}_{s \in S}$, indexovaný přes množinu S , kterou chápeme jako množinu *typů*, spolu s operacemi

$$\alpha: A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_k} \rightarrow A_s,$$

opět splňujícími zvolené rovnosti. Tím se třída příkladů rozšiřuje například o soubor množin, orientované multigrafy, kategorie nebo operády. Zmíněné struktury si postupně v textu představíme.

Při integraci algebraické struktury A nám půjde o nalezení nového objektu $\int A$, který věrně zachycuje a sceluje zmíněná algebraická data, tj. soubor množin, operace a rovnosti. Slovo *věrně* je zde důležité, neboť zároveň požadujeme, aby se při integraci neztratila žádná *algebraická informace*, a bylo tak možné původní objekt z jeho integrace zrekonstruovat. Formálně tak spolu s integrací budeme vyžadovat i určitou korespondenci algebraických struktur a nových objektů, které integrací vzniknou, viz. část 2. Poznamenejme, že v literatuře lze konstrukci objektu $\int A$ nalézt pod názvem *kategorie elementů* nebo *diskrétní Grothendieckova konstrukce* [8, s. I.5]. Užití symbolu $\int$ je v tomto kontextu běžné, což byla jedna z motivací pro naše názvosloví.

Dalším naším společným úkolem bude rozšířit integraci do kontextu obohacených algebraických struktur, a to konkrétně do situace, kdy nosná množina struktury je částečně uspořádaná a algebraická struktura toto uspořádání respektuje. K tomu využijeme jazyk a nástroje *teorie kategorií*. V textu se zabýváme pouze obohacenou algebraickou strukturou zvanou *obohacená operáda*. Pro zvědavé čtenáře připojujeme odkazy na přístupné texty o teorii kategorií [1] a o operádách [9, 5]. Tento text vychází především z dosud nepublikovaného článku autora [10].

Struktura textu. V části 1 uvedeme obohacenou algebraickou strukturu na množině přirozených čísel a na množině planárních zakořeněných stromů. Pro náročnější čtenáře zavedeme pojem obohacené operády a vysvětlíme jeho souvislost s dvěma představenými příklady. V části 2 provedeme integraci souboru množin $\{M_s\}_{s \in S}$ indexované přes pevně zvolenou množinu S , tj. popíšeme jeho scelení do jedné množiny $\int_S M$. V tomto případě nejsou přítomny žádné operátory ani rovnosti, a konstrukce je tak poměrně transparentní. Dále zintegrujeme orientovaný multigraf, tj. algebraickou strukturu sestávající ze dvou množin V a H (vrcholů a hran), a dále dvou operátorů $s, t: H \rightarrow V$, které přiřazují každé hraně její začátek a konec. V části 3 představíme obohacenou integraci dvou struktur z části 1. Doporučujeme čtenáři, aby se při pocitu přílišné abstrakce nebál přeskočit pasáže ke konkrétním příkladům, zejména k integraci čísel a stromů v části 3.

Proč integrovat algebraické struktury? Jak jsme již nastínili na začátku textu, integrace slouží jako nástroj pro studium integrovaného objektu. Princip algebraické integrace se dá, s jistým nadhledem, přirovnat k experimentálním metodám například ve fyzice. Pokud chceme studovat vlastnosti nějakého fyzického objektu, děláme to buď explicitně, tj. naměříme hmotnost, velikost atd., anebo objekt vystavíme určitému prostředí a zkoumáme jeho chování. Například jej vystavíme chladu, magnetickému poli nebo záření. Jinými slovy, o objektu zjistíme více informací, pokud sledujeme jeho interakci s okolím v různých situacích. V našem případě je studovaným objektem algebraická struktura. Pomocí integrace strukturu vnořujeme do nového prostředí (do prostředí kategorií), struktura tak má kolem sebe daleko více testovacích objektů, se kterými může interagovat. Lze například rozlišit dvě různé struktury $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ tak, že najdeme vhodnou kategorii $\mathcal{C}$ a ukážeme, že množina zobrazení $\{\mathcal{C} \rightarrow \int \mathcal{P}\}$, je větší či menší než množina zobrazení $\{\mathcal{C} \rightarrow \int \mathcal{Q}\}$.

Dalším přímým uplatněním integrace je dostupnost nových konstrukcí a vlastností z teorie kategorií. Chceme-li například sestrojit vhodný součin dvou struktur, můžeme obě zintegrovat, provést vhodný součin kategorií a zpětným procesem zrekonstruovat odpovídající strukturu. Tento princip je v konkrétním případě studován v [6, prop. 39].

1. PÁR STRUKTUR NA ZAHŘÁTÍ

Než se pustíme do integrace, popíšeme dvě konkrétní obohacené struktury na poměrně jednoduchých objektech. Jejich integraci provedeme na konci článku.

1.1. Přirozená čísla.

Označme $\mathbb{N}$ množinu přirozených čísel obsahující nulu. Množina $\mathbb{N}$ spolu s operací ‘+’ tvoří monoid, tj. operace $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je asociativní a má jednotku:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$0 + a = a = a + 0.$$

Dále je množina $\mathbb{N}$ uspořádaná relací $\leq$, která navíc zachovává sčítání. Přesněji řečeno, operace $+$ je homomorfismus uspořádaných množin z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (s uspořádáním po složkách) do $\mathbb{N}$. Například platí

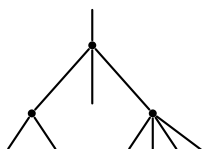
$$(3 \leq 5 \wedge 2 \leq 4) \Rightarrow 3 + 2 \leq 5 + 4.$$

Souhrnně lze říci, že $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ tvoří monoid v kategorii uspořádaných množin.

1.2. Zakořeněné planární stromy.

Podobnou, avšak o něco složitější strukturu lze popsat na množině zakořeněných planárních stromů. Formální definice zakořeněného planárního stromu je poměrně technická a nebudeme ji zde uvádět celou. Definici lze najít například v [3, s. 3 &

ex. 4.9]. Pro jednoduchost textu budeme mluvit pouze o stromech. Stromem rozumíme souvislý rovinný graf bez smyček a s vybraným kořenem. Upřednostníme estetiku textu před biologickou realitou a kořen stromu budeme kreslit vždy směřující vzhůru k nebi. Větve z vrcholů budou směřovat vždy dolů, viz. následující obrázek stromu.



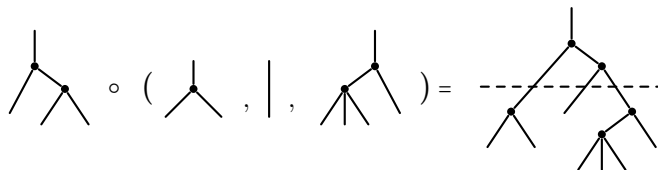
Vrcholy v kořenu a listech neuvažujeme (nekreslíme) a nezáleží nám na přesném nakreslení grafu, nýbrž na jeho vnitřní struktuře. Uvažujeme tedy rovnosti následujícího typu.



Množinu všech stromů budeme značit $\mathbb{T}$. Množina $\mathbb{T}$ je přirozeně graduovaná, tj. dá se chápat jako disjunktní sjednocení množin

$$\mathbb{T}_n = \{t \mid t \text{ je strom s } n \text{ listy}\}.$$

Podobně jako u přirozených čísel máme operaci, která kombinuje dva, či více stromů, do jednoho většího stromu. Operace se nazývá *roubování* (anglicky *grafting*) a budeme ji značit pomocí symbolu $\circ$, přičemž nalevo od symbolu $\circ$ je strom, do jehož listů postupně roubojeme stromy napravo od symbolu $\circ$. Graficky operaci vystihuje následující obrázek.



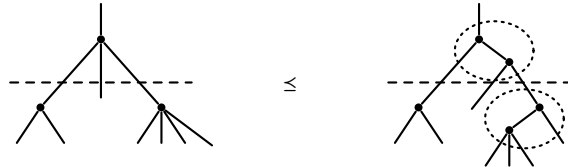
Formálně, pro libovolná přirozená čísla $n, k_1, \dots, k_n$ píšeme

$$\mathbb{T}_n \times \mathbb{T}_{k_1} \times \dots \times \mathbb{T}_{k_n} \xrightarrow{\circ} \mathbb{T}_{k_1 + \dots + k_n}.$$

Operace $\circ$ je asociativní (ve zobecněném smyslu) s jednotkou $'|' \in \mathbb{T}_1$, tj. *proutek* s jedním listem a bez vnitřních vrcholů. Dále, každou množinu $\mathbb{T}_n$ lze částečně uspořádat následujícím způsobem.

Píšeme $t \leq s$, jestliže t vznikne z s stažením vnitřních hran.

Lze nahlédnout, že operace $\circ$ respektuje částečné uspořádání $\leq$ na množinách $\mathbb{T}_n$.



Souhrnně řekneme, že $(\mathbb{T}_n, \leq, \circ, |)$ tvoří nesymetrickou operádu obohacenou v částečně uspořádaných množinách. Níže vysvětlíme, co to přesně znamená.

1.3. Obohacené operády.

Připomeňme, že pro dvě částečně uspořádané množiny $(P, \leq_P)$ a $(Q, \leq_Q)$, je jejich součin množina $P \times Q$ s uspořádáním po složkách:

$$[p', q'] \leq_{P \times Q} [p'', q''] \iff [p' \leq_P p'' \wedge q' \leq_Q q''].$$

Definice 1.1. Nesymetrická operáda obohacená v částečně uspořádaných množinách je soubor částečně uspořádaných množin $\mathcal{P}_n$, pro každé $n \geq 1$, spolu s vybraným prvkem

$$e \in \mathcal{P}_1$$

a operacemi

$$\circ: \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{k_n} \rightarrow \mathcal{P}_{k_1 + \cdots + k_n},$$

pro libovolná přirozená čísla $n, k_1, \dots, k_n$, které zachovávají uspořádání, a dále jsou asociativní a jednotkové v následujícím smyslu.

(Asociativita.) Pro libovolná přirozená čísla

$$n, k_1, \dots, k_n, m_1^1, \dots, m_{k_1}^1, \dots, m_n^n, \dots, m_{k_n}^n \in \mathbb{N}$$

a prvky $a \in \mathcal{P}_n$, $b_i \in \mathcal{P}_{k_i}$, $c_j^i \in \mathcal{P}_{m_j^i}$,

$$(a \circ (b_1, \dots, b_n)) \circ (c_1^1, \dots, c_{k_n}^n) = a \circ (b_1 \circ (c_1^1, \dots, c_{k_1}^1), \dots, b_n \circ (c_1^n, \dots, c_{k_n}^n)).$$

(Jednotka.) Pro $n \geq 1$ a prvek $a \in \mathcal{P}_n$,

$$a \circ (e, \dots, e) = a,$$

$$e \circ a = a.$$

Budeme používat zkrácené označení obohacená operáda.

Příklad 1.2. Zakořeněné planární stromy z předchozí sekce jsou přirozeným příkladem obohacené operády. Přirozená čísla s uspořádáním a sčítáním tvoří obohacenou operádu, kde $\mathcal{P}_1 = (\mathbb{N}, \leq)$, $\mathcal{P}_{n \geq 2} = \emptyset$, $\circ = +$ a $e = 0$.

2. DISKRÉTNÍ ALGEBRAICKÁ INTEGRACE

V této sekci popíšeme integraci jednodušších algebraických struktur. Zkoumáním elementárních příkladů se připravíme na integraci složitějších obohacených algebraických struktur a zároveň nastíníme význam korespondence původních objektů a objektů, jež vzniknou integrací.

2.1. Integrace souboru množin.

Uvažme soubor množin $\{M_s\}_{s \in S}$, indexovaný přes pevně zvolenou množinu S , tj. pro každý prvek $s \in S$ je dána množina M_s . Z tohoto souboru chceme vytvořit jeden celistvý objekt. Nabízí se definovat integraci souboru M jako disjunktní sjednocení

$$\int_S M_s := \bigsqcup_{s \in S} M_s = \{[s, m] \mid s \in S, m \in M_s\}.$$

Soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ jsme tímto převedli na jedinou množinu, ta však samotná nenese dostatek *algebraické informace*, neboť ztrácí explicitní informaci o tom, který prvek patřil do které množiny M_s . Informace je zachována pouze implicitně v první složce dvojice $[s, m]$. Jinými slovy, neumíme *algebraicky* (tj. aniž bychom mluvili o konkrétních prvcích $\int_S M_s$) rekonstruovat soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ z množiny $\int_S M_s$. Algebraickou informaci doplníme tak, že spolu s množinou $\int_S M_s$ uvažujeme i její kanonickou projekci $\pi_M: \bigsqcup_{s \in S} M_s \rightarrow S$, danou předpisem $\pi_M([s, m]) = s$. Formálně bychom tedy měli psát

$$\int_S M_s = \left(\bigsqcup_{s \in S} M_s \xrightarrow{\pi_M} S \right) \in \{ \text{množinová zobrazení vedoucí do } S \}.$$

Standardní je však symbolem $\int$ označovat pouze doménu projekce.

Příklad 2.1. Necht $S = \{\sharp, \flat\}$, $M_\sharp = \{X, Y, Z\}$ a $M_\flat = \{\clubsuit, \spadesuit\}$. Potom

$$\int_S M_s = \{[\sharp, X], [\sharp, Y], [\sharp, Z], [\flat, \clubsuit], [\flat, \spadesuit]\} \xrightarrow{\pi_M} \{\sharp, \flat\},$$

přičemž projekce π_M posílá každou dvojici na její první složku.

Soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ lze zrekonstruovat uvážením předobrazů projekce, tj.

$$M_s \cong \pi_M^{-1}(s). \quad (2.1)$$

Nyní si lze položit obecnější otázku, totiž zda z libovolného zobrazení množin tvaru $p: E \rightarrow S$ lze rekonstruovat soubor množin. Odpověď je kladná. Pro zadané p sestrojíme soubor E_s pomocí předobrazů

$$E_s := p^{-1}(s).$$

Integrace a předobraz zadávají určitou korespondenci objektů

$$\{ \text{soubor množin } \{M_s\}_{s \in S} \} \simeq \{ \text{zobrazení množin } p: E \rightarrow S \}, \quad (2.2)$$

Pokusíme se přiblížit, co korespondence vyjadřuje. Z (2.1) je patrné, že pro daný soubor $\{M_s\}_{s \in S}$ uvážením předobrazu její integrace nedostaneme přesně původní

soubor, avšak pro každé $s \in S$ je nová množina $\pi_M^{-1}(s)$ kanonicky bijektivní s původní M_s prostřednictvím

$$M_s \ni m \leftrightarrow [s, m] \in \pi_M^{-1}(s).$$

Obdobně, pokud začneme s obecným zobrazením $p: E \rightarrow S$ a uvážíme integraci předobrazu, dostaneme bijekci

$$\int_S p^{-1}(s) \ni [p(e), e] \leftrightarrow e \in E,$$

která respektuje zobrazení do S , neboli obě *cesty po šípkách* dají stejný výsledek.

$$\begin{array}{ccc} \int_S p^{-1}(s) & \xrightarrow{\cong} & E \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & S & \end{array}$$

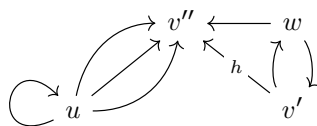
Integrační korespondence (2.2) tak není přesně bijekce tříd, ale jakási bijekce až na pojmenování: pro každý soubor umíme zkonstruovat zobrazení do S a opačně, přičemž konstrukce jsou inverzní až na přejmenování objektů. Podobnou korespondenci budeme požadovat od každé algebraické integrace. O korespondenci se dá přemýšlet jako o informační bezztrátovosti integrace.

2.2. Integrace orientovaného multigrafu.

Orientovaný multigraf Γ sestává ze dvou množin $V_\Gamma = \Gamma_0$ a $H_\Gamma = \Gamma_1$, vrcholů a hran multigrafu, a dvou množinových zobrazení

$$\Gamma_0 \xleftarrow{S} \Gamma_1 \xrightarrow{T} \Gamma_0,$$

udávajících každé hraně její počátek a konec. Příklad multigrafu je následující.



Pro hranu h z předešlého diagramu píšeme $S(h) = v'$ a $T(h) = v''$. Integrace multigrafu je množina dvojic

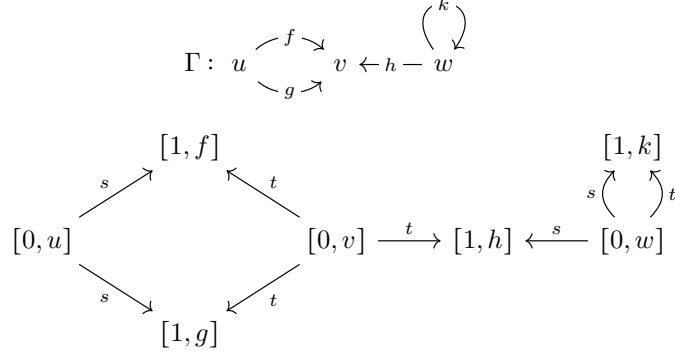
$$\int_2 \Gamma = \{[i, \alpha] \mid i \in \{0, 1\} \text{ a } \alpha \in \Gamma_i\},$$

spolu se dvěma (jednostrannými) relacemi

$$[0, S(h)] \xrightarrow{s} [1, h], \quad [0, T(h)] \xrightarrow{t} [1, h].$$

Symbol 2 označuje množinu $\{0, 1\}$, vybavenou relacemi $0 \xrightarrow{s} 1$ a $0 \xrightarrow{t} 1$. Součástí integrace je projekce $\pi_\Gamma: \int_2 \Gamma \rightarrow 2$, která zachovává relace $\xrightarrow{s}$ a $\xrightarrow{t}$.

Příklad 2.2. Následující dva diagramy zobrazují multigraf Γ a jeho integraci.



Nyní určíme pravou stranu integrační korespondence. Necht E je libovolná množina se dvěma relacemi $\xrightarrow{s}$ a $\xrightarrow{t}$ a $p: E \rightarrow 2$ je zobrazení množin, které relace zachovává, tj. platí

$$a \xrightarrow{s} b \Rightarrow p(a) \xrightarrow{s} p(b), \quad a \xrightarrow{t} b \Rightarrow p(a) \xrightarrow{t} p(b).$$

Není těžké si rozmyslet, že ne každé takové zobrazení p jednoznačně zadává orientovaný multigraf. Mezi všemi zobrazeními p musíme vybrat pouze ta, jež splňují následující algebraickou vlastnost.

Definice 2.3. Necht E je množina se dvěma relacemi $\xrightarrow{s}, \xrightarrow{t}$ a $p: E \rightarrow 2$ je zobrazení množin, které relace zachovává. Zobrazení p nazveme diskretní fibrací, jestliže navíc pro libovolný prvek $x \in E$ platí:

$$\text{pokud } 0 \xrightarrow{\alpha} p(x) \text{ v } 2, \text{ pak existuje jediné } y \in E \text{ takové, že } y \xrightarrow{\alpha} x \text{ v } E,$$

pro $\alpha \in \{s, t\}$.

Poznamenejme, že tuto vlastnost splňuje každé π_Γ pocházející z integrace multigrafu. Z každé diskretní fibrace p lze zrekonstruovat orientovaný multigraf: položíme $V_p = p^{-1}(0)$, $H_p = p^{-1}(1)$, a dále pro $h \in H_p$ definujeme $S(h)$ z vlastnosti fibrace, tj. jediný element $S(h) := v$, který splňuje $v \xrightarrow{s} h$, neboť $0 \xrightarrow{s} 1 = p(h)$. Vrchol $T(e)$ definujeme obdobně a dostáváme kýženou korespondenci

$$\{\text{orientované multigrafy}\} \simeq \{\text{diskretní fibrace } p: E \rightarrow 2\}.$$

2.3. Diskretní integrace v plné obecnosti.

Pro koncepční vysvětlení a univerzální přístup k diskretní integraci algebraických struktur je vhodné použít jazyka *teorie kategorií*. V této sekci nebudeme úplně formální, neboť technické detaily by tomuto textu neprospěly. Poznamenejme, že všechny vyvstálé nejasnosti či paradoxy se dají ošetřit. Čtenáře odkazujeme na klasickou literaturu, např. [1].

Kategorii $\mathcal{C}$ chápeme jako zobecněnou množinu, kde kromě prvků $a, b, c \in \mathcal{C}$ (tzv. objektů kategorie) uvažujeme i systém relací mezi nimi (tzv. morfismů mezi

objekty), které značíme

$$f: a \rightarrow b.$$

Požadujeme, aby se morfismy daly skládat, tj. pro libovolné $f: a \rightarrow b$ a $g: b \rightarrow c$ existuje jednoznačně morfismus $(g \circ f): a \rightarrow c$, a aby skládání bylo asociativní a mělo jednotky, tedy aby platilo

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

a pro každý objekt $a \in \mathcal{C}$ existoval morfismus $1_a: a \rightarrow a$ s vlastností

$$1_b \circ f = f = f \circ 1_a.$$

Morfismu 1_a říkáme *identita* na objektu a . Dalším pojmem teorie kategorií je *funktor*, tj. zobrazení kategorií $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Funktor objektům $a \in \mathcal{C}$ přiřazuje objekty $Fa \in \mathcal{D}$ a morfismům $f: a \rightarrow b$ z $\mathcal{C}$ přiřazuje morfismy $Ff: Fa \rightarrow Fb$, přičemž přiřazení respektuje skládání a jednotky.

Příklad 2.4.

- Každá množina S zadává tzv. diskretní kategorii, jejíž objekty jsou prvky $s \in S$ a jejíž morfismy jsou pouze (umělá) zobrazení $1_s: s \rightarrow s$. Funktory diskretních kategorií jsou jednoduše množinová zobrazení.
- Bohatším příkladem je kategorie množin Set , jejíž objekty jsou množiny a morfismy jsou klasická množinová zobrazení $f: X \rightarrow Y$. Poznamenejme, že funktory $M: S \rightarrow \text{Set}$, z diskretní kategorie S , jsou přesně soubory množin M_s .
- Z libovolné kategorie $\mathcal{C}$ lze vytvořit novou kategorii prostým otočením všech šipek. Novou kategorii značíme $\mathcal{C}^{\text{op}}$.
- V souvislosti s multigrafy uvedeme kategorii $\mathbf{2}$, která má dva objekty 0 a 1 , a dále kromě identit na objektech další dva morfismy $s: 0 \rightarrow 1$ a $t: 0 \rightarrow 1$. Funktory

$$\Gamma: \mathbf{2}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

jsou přesně orientované multigrafy.

Nyní přizpůsobíme pojem diskretní fibrace z definice 2.3 pro libovolnou kódoménu $\mathcal{C}$.

Definice 2.5. Necht $\mathcal{E}, \mathcal{C}$ jsou kategorie a $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ je funktor. Potom p nazveme diskretní fibrací, jestliže pro libovolný objekt $X \in \mathcal{C}$ a morfismus $f: y \rightarrow p(X)$ v $\mathcal{C}$ existuje jediný morfismus $\tilde{f}: Y \rightarrow X$ v $\mathcal{E}$, takový, že $p(\tilde{f}) = f$. Schematicky:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad \exists! \quad} & X \in \mathcal{C} \\ p \downarrow & & \\ y & \xrightarrow{\quad f \quad} & p(X) \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Obecně lze diskretní algebraickou integraci formulovat následujícím způsobem.

Věta 2.6. *Nechť $\mathcal{C}$ je kategorie a $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ funktor. Integrace $\int_{\mathcal{C}} F$ je kategorie, jejíž objekty jsou páry $[c \in \mathcal{C}, \alpha \in Fc]$ a morfismy jsou tvaru*

$$\bar{f}: [d, Ff(\alpha)] \rightarrow [c, \alpha],$$

kde $f: d \rightarrow c$ je morfismus $\mathcal{C}$. Integrace je vybavena projekcí (funktoem)

$$\pi_F: \int_{\mathcal{C}} F \rightarrow \mathcal{C},$$

jež je diskrétní fibrací. Dále je zde korespondence (jednoznačná až na kanonický izomorfismus)

$$\{\text{funktorů } F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}\} \simeq \{\text{diskrétní fibrace } p: E \rightarrow \mathcal{C}\}.$$

Důkaz. Tvrzení je standardní, důkaz uvádí například [7, s. 2]. □

3. OBOHACENÁ ALGEBRAICKÁ INTEGRACE

Abychom mohli popsat integraci obohacených struktur, potřebujeme, na straně druhé, obohatit i kategorie. Opět zjednodušeně, kategorie $\mathcal{C}$ obohacená v částečně uspořádaných množinách je množina objektů $\mathcal{C}$ s relacemi mezi objekty (tj. s morfismy $f: a \rightarrow b$), přičemž morfismy vedoucí mezi každými dvěma objekty a, b jsou částečně uspořádané, viz. následující diagram.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ a & \xrightarrow{g} & b \\ & \curvearrowleft & \\ & h & \end{array}$$

Dále požadujeme, aby skládání morfismů tato částečná uspořádání respektovalo. Malá obohacená kategorie může vypadat následovně.

$$\begin{array}{ccccc} & & b & \xleftarrow{i} & d \\ & f' & \curvearrowright & & \downarrow j' \\ & & c & \xleftarrow{f''} & a \\ & & \downarrow g & & \downarrow h \\ & & c & \xleftarrow{h} & a \end{array}$$

Integrace obecné obohacené operády z definice 1.1, stejně jako pojem operadické fibrace, je pro tento text příliš technicky náročná, zvědavého čtenáře odkážeme na [10]. Pojmy vychází ze standardního pojmu (kategoriální) fibrace (viz. např. [4]), jejíž diskrétní verzi jsme uvedli v definici 2.5, a dále z pojmu diskrétní operadické fibrace, zavedeného v [2]. Text [10] zavádí explicitní integraci libovolné obohacené operády a poskytuje korespondenci

$$\{\text{obohacené operády}\} \simeq \{\text{operadické fibrace}\},$$

používá však nepatrně obecnější kontext kategoriálních operád. Instanci obohacené integrace si názorně předvedeme, tj. zintegrujeme struktury z části 1 a uvedeme některé jejich zajímavé vlastnosti.

3.1. Integrace přirozených čísel.

Připomeňme monoid přirozených čísel $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ v částečně uspořádaných množinách, popsany v části 1. Jeho integrace je obohacená kategorie $\int \mathbb{N}$, jejíž objekty jsou přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ a její morfismy jsou tvaru $a \xrightarrow{p} b$, kde $p \in \mathbb{N}$ a $p + b \geq a$. Na příkladu ukážeme jak funguje skládání morfismů.

Složení morfismů $5 \xrightarrow{4} 2$ a $2 \xrightarrow{5} 0$ je morfismus $5 \xrightarrow{4+5} 0$.

Platí totiž $4 + 2 \geq 5$ a $5 + 0 \geq 2$, a proto i $(4 + 5) + 0 = 4 + (5 + 0) \geq 4 + 2 \geq 5$. Roli identity $n \xrightarrow{1_n} n$ zastává morfismus $n \xrightarrow{0} n$, neboť platí $0 + n \geq n$ a $0 + p = p = p + 0$. Je vidět, že pro komponování morfismů v $\int \mathbb{N}$ jsou zapotřebí všechny algebraické vlastnosti částečně uspořádaného monoidu $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$, popsané v části 1. Dále, pro dvě zafixovaná čísla a a b tvoří morfismy množinu uspořádanou relací $\leq$. To jest,

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ a & \xrightarrow{\quad} & b \\ & q & \end{array}$$

jestliže $p \geq q$ jakožto přirozená čísla. Následující diagram zachycuje část kategorie $\int \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & 11 & & \\ & & \vee & & \\ 5 & \xrightarrow{4} & 2 & \xrightarrow{5} & 0 \\ & \vee & & \vee & \\ & 3 & \xrightarrow{2} & & \\ & & \parallel & & \\ & & 5 & & \end{array}$$

Všimněme si, že každý morfismus $p: a \rightarrow b$ (tj. $b + p \geq a$) lze přirozeně rozložit jako

$$a \xrightarrow{0} b + p \xrightarrow{p} b.$$

Navíc, pro libovolná dvě čísla $a \geq b$ má uspořádaná množina morfismů $a \xrightarrow{p} b$ nejmenší prvek, kterým je $a \xrightarrow{a-b} b$.

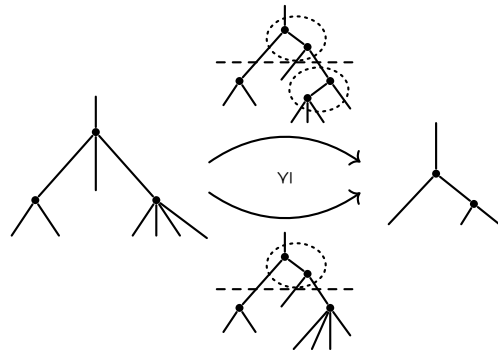
Množinově se při integraci přirozených čísel nestalo nic moc zajímavého, neboť objekty $\int \mathbb{N}$ jsou stejné jako objekty (prvky) $\mathbb{N}$. Pozorujeme však, že integrace spojila struktury dvou různých typů, tj. relace $\leq$ a operace $+$, v jednu strukturu morfismů na $\mathbb{N}$. Sčítání čísel je zakódováno ve skládání morfismů

$$0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 0 = 0 \xrightarrow{a+b} 0$$

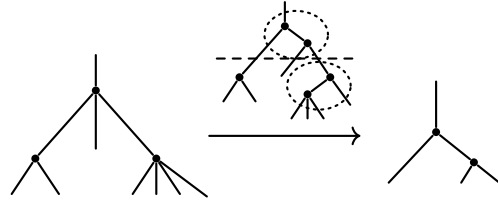
a uspořádání $\leq$ je zachováno jednak v uspořádání morfismů $\{0 \xrightarrow{p} 0\}$, a jednak přímo pomocí morfismů $b \xrightarrow{0} a$.

3.2. Integrace stromů.

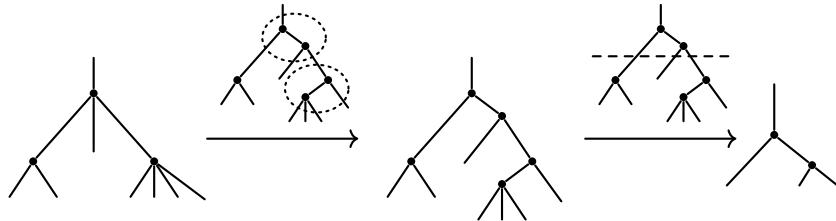
Připomeňme obohacenou operádu stromů $\mathbb{T}$ ze části 1. Její integrací je kategorie $\int \mathbb{T}$, jejíž objekty jsou stromy. Morfismus stromů $s \rightarrow t$ se dá popsat jako nový strom p vybavený (i) řezem (naznačeno přerušovanou čarou), přičemž část nad řezem je strom t , a (ii) posloupností kontrakcí hran stromu p (naznačeno přerušovanými elipsami), které vyústí ve strom s . Morfismy jsou částečně uspořádány relací $\leq$, pocházející z uspořádání operády $\mathbb{T}$, tj. danou kontrakcí vnitřních hran. Příklad dvou morfismů a jejich uspořádání je následující.



Opět zmiňme, že libovolný morfismus



lze rozložit na dvě části



z nichž první využívá pouze strukturu uspořádání, tj. stahování hran (přičemž řez je veden u listů) a druhá pouze struktury operády, tj. řezu (přičemž posloupnost stažení hran je prázdná). Dále, z každého stromu s vede speciální morfismus do

triviálního stromu $[\cdot]$. Tím je samotný strom s bez jakýchkoliv kontrakcí a s řezem u kořene.

Nakonec zmiňme, že operády jsou struktury *typu* Δ , tj. kategorie, jejíž objekty jsou konečné uspořádané množiny $\{1, \dots, m\}$ a jejíž morfismy jsou surjekce zachovávající pořadí. Vlastnost operadické fibrace

$$\pi_{\mathbb{T}}: \int_{\Delta} \mathbb{T} \rightarrow \Delta$$

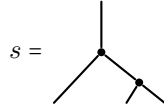
říká, že pro zadaný strom s mající n listů a pro libovolné surjektivní zobrazení množin

$$f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

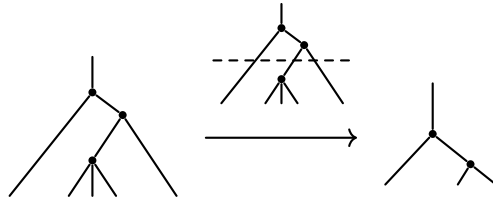
zachovávající pořadí, existuje univerzální strom t_f s m listy a (v jistém smyslu univerzální) morfismus stromů $t_f \rightarrow s$. Rozhodli jsme se nezatěžovat text dalšími detaily a místo nich uvedeme pouze konkrétní příklad univerzálního morfismu pro konkrétní s a f .

Příklad 3.1. Nechť s je následující strom a zobrazení $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ je zadané jako

$$f(1) = 1, f(2) = f(3) = f(4) = 2 \text{ a } f(5) = 3.$$



Univerzální morfismus $t_f \rightarrow s$ v této situaci vypadá následovně (povšimněme si, že nestahuje žádné hrany stromu t_f).



REFERENCE

- [1] S. Awodey: *Category theory*, Oxford University Press, 2010.
- [2] M. A. Batanin, M. Markl: *Operadic categories and duoidal Deligne's conjecture*, *Advances in Mathematics*, 285:1630–1687, 2015.
- [3] M. A. Batanin, M. Markl: *Operadic categories as a natural environment for Koszul duality*, *Compositionality*, 5, 2023.
- [4] F. Borceux: *Handbook of Categorical Algebra, Vol. 2*, Cambridge University Press, 1994.
- [5] T.-D. Bradley: *What is an operad? Part 1*, Personal webpage, <https://www.math3ma.com/blog/what-is-an-operad-part-1>, 2017. Accessed 02.09.2025.
- [6] D. Dunina: *Wreath product of operadic categories*, Diplomová práce, Univerzita Karlova, 2024.

- [7] F. Loregian and E. Riehl: *Categorical notions of fibration*, Expositiones Mathematicae, 38(4), 2020.
- [8] S. MacLane and I. Moerdijk: *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] J. Stasheff: *What is an operad*, Notices of the AMS, 51(6), 2004.
- [10] D. Trnka: *Integration of a categorical operad*. Theory and Applications of Categories, 45(3), 2026.

Dominik Trnka, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: `trnka@fme.vutbr.cz`

METRICKÉ PROSTORY PŘÍMKOVÝCH PLOCH

MATOUŠ TRNKA

ABSTRAKT. Tento článek pojednává o metrických vlastnostech přímkových ploch, které jsou chápány jako křivky na homogenní varietě přímek, a využívá přístupu zavedeného Felixem Kleinem. Stanovuje si dva hlavní cíle: nalezení systému invariantů, který plochu jednoznačně popisuje bez ohledu na umístění nebo parametrizaci, a klasifikaci homogenních přímkových ploch, jež mají tyto invarianty konstantní. Jako klíčový nástroj slouží konstrukce pohyblivého repéru křivky v libovolném homogenním prostoru, jež je zobecněním konstrukce známé jako Frenetova–Serretova.

1. ÚVOD

V tomto článku se seznámíme s konceptem, který je součástí naší geometrické intuice už od střední školy. Když například řešíme úlohu o kružnici, nakreslíme si na papír nějakou kružnici a nezajímá nás, kde v prostoru se nachází nebo jaký má poloměr. Skutečnost je taková, že pod pojmem „kružnice“ myslíme třídu všech kružnic v rovině, a protože jsou si všechny podobné, můžeme danou úlohu řešit s libovolným reprezentantem této třídy. Jiná situace však nastane, je-li v úloze potřeba něco měřit. Pak musíme od sebe rozlišit kružnice s různými poloměry a chceme tedy ztotožnit pouze kružnice navzájem shodné, nikoli podobné.

V textu se pokusíme uvést výhody úhlu pohledu, který zavedl Felix Klein v říjnu roku 1872 na univerzitě v Erlangen u příležitosti svého profesorského jmenování, a sice že geometrie daného prostoru není zakódována v nosné množině prvků prostoru, nýbrž v transformacích, které k danému prostoru uvažujeme.

Předmětem zkoumání zde bude tzv. *přímková plocha*, tedy plocha, která může vzniknout pohybem přímky v prostoru, případně pohybem napnuté struny skrz kostku hlíny. Tyto plochy však budeme vnímat jako křivky na jakési varietě přímek, pro které si stanovíme dva cíle.

Prvním z nich nechť je nalezení tzv. *systému invariantů* přímkové plochy, tedy charakteristik, které danou plochu jednoznačně popisují, bez ohledu na její parametrizaci nebo umístění v prostoru. Dva takové systémy je již možné nalézt v literatuře, konkrétně v knihách [1] a [2]. My však v první kapitole tohoto textu nabídneme lehce odlišný pohled na věc, ve druhé kapitole si vyzkoušíme odvození invariantů prostorové křivky a zjištěné poznatky pak ve třetí kapitole aplikujeme

2020 MSC. Primární 53A25; Sekundární 53A55, 53A04.

Klíčová slova. Křivky, přímkové plochy, Frenetův repér, invarianty, homogenní křivky.

Práce byla podpořena projektem MUNI/A/1569/2024.

na přímkové plochy. Ke zmíněným systémům invariantů se tak dostaneme zcela přirozenou cestou.

Druhým cílem pak bude rozřadit všechny přímkové plochy *homogenní*. Ty si můžeme představit jako ekvivalent k homogenním křivkám, kterými jsou v prostoru přímka, kružnice nebo tzv. šroubovice (jejíž tvar má například pružina). Jejich hlavní vlastností je, že při vhodném posouvání, otáčení nebo šroubování dané křivky (později i plochy) se nemění prostor, který tato křivka zaujímá. Samotnou klasifikaci pak provedeme podobným nástrojem jako v konstrukci invariantů.

2. METRICKÉ HOMOGENNÍ PROSTORY

Původem slova „metrika“ je řecké „*metria*“, tedy měření. Ze základů eukleidovské geometrie pak vyplývá, že měřit lze v prostoru mimo jiné vzdálenost nějakých dvou bodů nebo odchylku nějakých dvou přímek, přičemž tyto dvě míry nás budou v tomto textu zajímat nejvíce.

Jak bylo uvedeno v úvodu, při zkoumání geometrie metrického prostoru nezáleží tolik na nosné množině prvků, nýbrž na třídě uvažovaných transformací. V našem případě půjde v průběhu celého textu o tzv. *přímé shodnosti trojrozměrného prostoru*, tj. transformace, které zachovávají prostorové vzdálenosti, úhly a orientace. Alternativně lze říci, že to jsou ty transformace, které zobrazí jednotkovou krychli vždy na jednotkovou krychli, a to se zachováním orientace vrcholů. To znamená, že pohlédneme-li na krychli stěnou $ABCD$ k sobě a přečteme-li tyto vrcholy po směru hodinových ručiček, čteme je ve stejném pořadí i po dané transformaci.

Protože pro každou takovou shodnost existuje i shodnost zpětná a protože identita, tj. transformace zobrazující každý bod sám na sebe, je také přímou shodností, má tato třída strukturu grupy, kterou budeme značit G . Tato grupa je šesti-rozměrná, neboť krychli můžeme jednak posouvat ve třech navzájem kolmých směrech a jednak rotovat kolem tří navzájem kolmých os. Od této chvíle tedy neuvažujeme jiné transformace prostoru než tyto.

Homogenní prostory bodů a přímek

Máme-li již zafixovanou grupu shodností, můžeme se zabývat množinou nosnou, tedy které objekty můžeme danými shodnostmi transformovat. Jak je naznačeno v prvním odstavci této kapitoly, základními adepty jsou body a přímky.

Množinu bodů v trojrozměrném eukleidovském prostoru budeme značit $\mathbb{E}^3$, přičemž dimenze 3 se odvíjí od počtu směrů, ve kterých můžeme daným bodem hýbat.

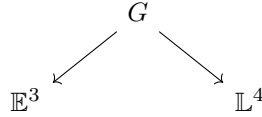
Množinu přímek pak budeme značit $\mathbb{L}^4$, přičemž dimenze 4 plyne z faktu, že danou přímkou můžeme hýbat jednak posouváním ve dvou směrech na ni kolmých a jednak rotací kolem dvou na ni kolmých os.

K uvedeným množinám ještě přidejme množinu vektorů $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$, které chápeme jako orientované úsečky mezi dvojicemi bodů, přičemž nebereme v potaz jejich umístění. Zobrazení-li v nějaké shodnosti dva vektory, jejich obrazy budou stejně velké a budou mít mezi sebou stejnou odchylku. Toto souvisí také se skutečností, že shodnosti jsou přesně ty transformace reálného prostoru, které zachovávají tzv.

skalární součin dvou vektorů jakožto symetrickou bilineární formu zadávající euclidovskou metriku.

Prostor bodů a prostor přímek jsou vzhledem ke grupě G homogenní. To znamená, že pro libovolné dva body A, B existuje alespoň jedna shodnost, která A převede na B , podobně pro dvě libovolné přímky. Této vlastnosti říkáme tzv. *transitivní akce grupy G na prostoru $\mathbb{E}^3$, resp. $\mathbb{L}^4$* . Díky tomu vypadá prostor „všude stejně“ a my jej tak můžeme prozkoumat pouhou volbou jednoho počátku a zkoumáním jeho okolí.

Po zbytek textu tedy zvolme počáteční bod $O \in \mathbb{E}^3$, resp. počáteční přímku $\mathcal{O} \in \mathbb{L}^4$. Uvažíme-li pak libovolnou shodnost $g \in G$, můžeme se ptát, kam tato shodnost zobrazí počáteční bod, resp. počáteční přímku, což nám zadává dvě přirozené projekce:



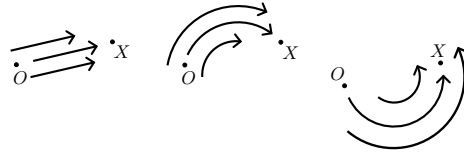
Máme-li zvolený počátek, bude pro nás užitečné zavést i tzv. *stabilizační podgrupu G_O^3 , resp. G_O^2* , jež obsahuje právě ty shodnosti, které zachovávají počáteční bod O , resp. počáteční přímku $\mathcal{O}$, na svém místě. Čísla u nich opět udávají jejich dimenze, protože bod je zachován rotacemi kolem tří navzájem kolmých os, které jím procházejí, a přímka je zachována jednak rotací kolem sebe samé a jednak posunem ve svém směru.

Prostor $\mathbb{E}^3$, resp. $\mathbb{L}^4$ pak můžeme ztotožnit s prostorem tzv. *levých tříd G/G_O^3 , resp. G/G_O^2* , přičemž příslušnou levou třídu definujeme a s příslušným bodem, resp. přímkou, ztotožníme následovně:

$$[gG_O^3] = \{gh, h \in G_O^3\} \leftrightarrow g(O),$$

$$[gG_O^2] = \{gh, h \in G_O^2\} \leftrightarrow g(\mathcal{O}).$$

Dvě shodnosti tedy zařadíme do stejné třídy právě tehdy, když zobrazují počátek na stejný bod v prostoru, resp. počáteční přímku na stejnou přímku v prostoru.



Obrázek 1. Různé shodnosti třídy $[gG_O^3]$

Všimněme si, že dimenze faktorprostoru jakožto rozdíl dimenzí šesti-rozměrné grupy a trojrozměrného, resp. dvojrozměrného, stabilizátoru souhlasí.

Souřadnice

Abychom mohli v dalším textu s uvedenými objekty počítat, je třeba jim přiřadit nějaké souřadnice. Z praktických důvodů budeme trojrozměrný eukleidovský prostor chápat jako afinní nadrovinu čtyřrozměrného reálného vektorového prostoru s první souřadnicí rovnou jedné. Kartézské souřadnice každého bodu x_A, y_A, z_A tak rozšíříme na čtveřici $A = (1, x_A, y_A, z_A)^T$, přičemž transpozice T je zde z důvodu sloupcového zápisu souřadnic. Vektor jakožto rozdíl dvou bodů vyjádříme čtveřicí $u = (0, u_1, u_2, u_3)^T$ a přímkou získáme jako součet bodu a s -násobku vektoru, tedy např. $\mathcal{L} = A + s \cdot u$. Skalárním součinem dvou vektorů chápeme výraz

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

a shodností je pak lineární automorfismus čtyřrozměrného prostoru zachovávající zmíněnou nadrovinu, ve které je navíc zachován i onen skalární součin a orientace báze. Matice takového lineárního zobrazení má kvůli zachování nadroviny blokový tvar

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & R \end{array} \right) \in G,$$

podmínka pro zachování skalárního součinu pak vynucuje matici R ortogonální a podmínka pro zachování orientace vyžaduje $\det(R) = 1$. Blok a této matice budeme nazývat *translační* a blok R *rotační*. Rozdělíme-li pak tuto matici do čtyř sloupců, dostaneme jeden libovolný bod a tři na sebe kolmé jednotkové vektory, tedy tzv. *ortonormální repér* (A, r_1, r_2, r_3) , který je vlastně obrazem standardního ortonormálního repéru (O, e_1, e_2, e_3) v dané shodnosti.

Na závěr kapitoly se pokusme objasnit, jak vypadají třídy rozkladu grupy. V případě prostoru bodů uvažujeme počátek $O = (1, 0, 0, 0)^T$, který je stabilizován rotacemi

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & R \end{array} \right) \in G_O^3.$$

V každé třídě $[gG_O^3]$ pak najdeme reprezentanta s triviálním rotačním blokem

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & R \end{array} \right) G_O^3 \right] = \left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ a & E \end{array} \right) G_O^3 \right],$$

neboť obě matice stejně zobrazí počátek O na bod $A = (1, a_1, a_2, a_3)^T$.

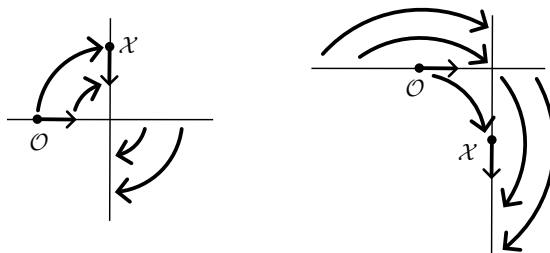
V prostoru přímek je počátkem přímk $\mathcal{O} = O + s e_1 = (1, s, 0, 0)^T$, kterou stabilizují shodnosti ve tvaru

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{32} & r_{33} \end{array} \right) \in G_{\mathcal{O}}^2,$$

přičemž koeficient a_1 vyjadřuje posun podél osy x a ortogonální blok r_{ij} rotaci kolem této osy. Dohromady pak tyto dvě složky zadávají tzv. *šroubový pohyb*.

Na rozdíl od předchozího případu nemáme v třídě $[gG_{\mathcal{O}}^2]$ přirozeného reprezentanta. Odpovídající přímk je totiž zadána prvními dvěma sloupci matice g , které

hrají roli bodu a směřového vektoru přímky, jenže bodů zadávajících tutěž přímku je mnoho a všechny jsou rovnocenné, jak lze vidět na obrázku 2.



Obrázek 2. Různé shodnosti téže třídy $[gG_{\mathcal{O}}^2]$

3. INVARIANTY PROSTOROVÝCH KŘIVEK

Ve zbytku článku se budeme zabývat křivkami v homogenních prostorech a jejich shodnostmi. Nejprve prozkoumáme křivky v prostoru bodů, z nich vyvodíme poznatky pro obecný homogenní prostor a ty pak aplikujeme na křivky v prostoru přímk, tedy *přímkové plochy*. Vrcholem této úvodní sekce je tvrzení 1, které zde uvádíme z důvodu postupného budování tvrzení pozdějších, jejichž důkazy pak budou o to snazší.

Zkoumáme-li shodné křivky, tj. kdy mezi dvěma křivkami existuje shodnost zobrazující jednu křivku na druhou (viz obrázek 3), zajímají nás její *invarianty*. To jsou charakteristiky závislé na parametru křivky, které jsou shodnými transformacemi zachovány. V případě křivky v eukleidovském prostoru je to její křivost a torze, které dohromady stačí na úplný popis křivky až na shodnosti, jak uvidíme v konstrukci v následující kapitole.

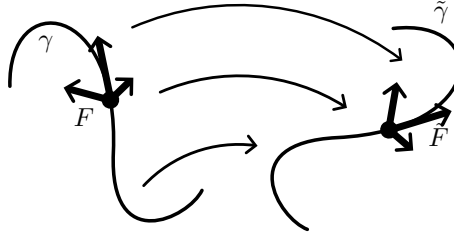
Prostorovou křivkou chápeme zobrazení $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, které reálnému parametru t přiřadí bod na křivce $\gamma(t) \in \mathbb{E}^3$. Jinou parametrizací téže křivky pak chápeme zobrazení $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, které má stejný obraz jako γ .

Uvažujeme-li jednu křivku vzhledem k různým parametrizacím, obecně sama se sebou nebude shodná. V metrickém prostoru má však každá regulární křivka (tj. taková splňující $\gamma' \neq 0$) jistou přirozenou parametrizaci, tzv. *parametrizaci obloukem*, odpovídající délce části křivky od jejího krajního bodu $\gamma(t_0)$, tedy $\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^3$, kde L je celková délka křivky. Tato parametrizace je invariantní vůči shodnostem. Jestliže tedy takto parametrizujeme dvě křivky $\gamma, \tilde{\gamma}$ v prostoru nezávisle na sobě, pak jsou shodné jakožto podmnožiny prostoru právě tehdy, když jsou shodné i vzhledem k těmto parametrizacím, tedy když pro shodnost g platí $\tilde{\gamma} = g(\gamma)$.

Tato parametrizace odpovídá rovnoměrnému pohybu podél křivky. Jednoznačně se tak dá charakterizovat vlastností, že její tečný vektor γ' má vždy jednotkovou velikost. Ve zbytku této kapitoly uvažujeme parametrizaci obloukem u každé prostorové křivky implicitně.

Pohyblivý repér křivky

Užitečným nástrojem pro hledání invariantů prostorové křivky je tzv. *pohyblivý repér*. To je kolekce jednoho bodu a tří vektorů $F(t) = (\gamma(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, přičemž ke každému bodu křivky je tak přiřazena zvláštní báze. Protože je však pro přiřazení báze více způsobů, je naším cílem najít nějaké přirozené a invariantní vůči shodnostem, stejně jako tomu bylo v případě parametrizace obloukem. Sestrojíme-li pak tento repér na dvou shodných křivkách $\gamma, \tilde{\gamma} = g(\gamma)$ nezávisle na sobě, měl by tuto shodnost respektovat a splnit $\tilde{F} = g(F)$.



Obrázek 3. Shodnost pohyblivých repérů

Invarianty křivky lze pak nalézt v tzv. *invariantní matici* $\Omega(t)$, která zde hraje roli relativní změny kanonického repéru $F(t)$, tedy matice přechodu mezi repérem v daném bodě a jeho infinitezimální změnou (čili derivací)

$$F\Omega = F'.$$

Invariantní matici Ω v tomto textu věnujeme zvláštní pozornost, neboť jde o kompletní charakteristiku křivky nezávislou na shodnostech. Repér libovolné křivky F a repér shodné křivky $\tilde{F} = g(F)$ mají totiž stejnou invariantní matici Ω , což plyne z výpočtu

$$\tilde{F}\Omega = gF\Omega = gF' = \tilde{F}'.$$

Klasickým příkladem pro odvození repéru invariantního vůči shodnostem je tzv. *Frenetova–Serretova* konstrukce, která vhodně využívá derivací, kolmostí a velikostí, protože ty se ve shodných transformacích nemění. Konstrukci lze přirovnat k ortonormalizaci tzv. *oskulačního repéru křivky* $\alpha = (\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''')$, které však úspěšně docílíme jen za předpokladu, že je křivka jistým způsobem obecná, tj. že má repér α plnou dimenzi. Finální vektory repéru jsou pak tohoto tvaru:

$$u_1 := \gamma', \quad u_2 := u_1', \quad u_3 := u_1 \times u_2, \quad (1)$$

přičemž konkrétně lze výše zmíněného docílit pouze pro nenulový vektorový součin $\gamma' \times \gamma''$. Naopak, bodům s tímto součinem nulovým se říká *inflexní*.

Tvrzení 1. *Je-li křivka $\gamma(t) \in \mathbb{E}^3$ bez inflexních bodů parametrizována obloukem, její invariantní matice Ω je ve tvaru*

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa(t) & 0 \\ 0 & \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & 0 & \tau(t) & 0 \end{array} \right),$$

přičemž charakteristiky $\kappa > 0$ a τ označme jako křivost a torze křivky.

Důkaz. Ověříme tuto podobu matice Ω ze vztahu

$$(\gamma, u_1, u_2, u_3) \cdot \Omega = (\gamma', u'_1, u'_2, u'_3).$$

První řádek Ω je roven $(0, 0, 0, 0)$, jelikož γ je jako jediný bodem (čili má jako první souřadnici vždy 1) a na pravé straně jsou pouze vektory (čili všechny s první souřadnicí 0).

Zbytek matice Ω je pak vyplněn po sloupcích souřadnicemi derivovaných vektorů vzhledem k bázi (u_1, u_2, u_3) , přičemž vzhledem k eukleidovskému prostoru tyto souřadnice můžeme vyjádřit příslušnými skalárními součiny. Dostaneme tak rozšířenou Gramovu matici:

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma' \cdot u_1 & u'_1 \cdot u_1 & u'_2 \cdot u_1 & u'_3 \cdot u_1 \\ \gamma' \cdot u_2 & u'_1 \cdot u_2 & u'_2 \cdot u_2 & u'_3 \cdot u_2 \\ \gamma' \cdot u_3 & u'_1 \cdot u_3 & u'_2 \cdot u_3 & u'_3 \cdot u_3 \end{array} \right). \quad (2)$$

První sloupec pak plyne přímo z definice vektoru $u_1 := \gamma'$, v dalších sloupcích zdůvodníme nejprve nuly na diagonále pomocí derivace součinu

$$u_i \cdot u_i = 1 \quad \rightarrow \quad u_i \cdot u'_i = 0$$

a antisymetrii zbytku bloku derivací vztahu

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad \rightarrow \quad u_i \cdot u'_j + u'_i \cdot u_j = 0.$$

Zbývající nuly na vedlejší diagonále bloku lze nakonec zdůvodnit vztahem z (1):

$$u'_1 \cdot u_3 \approx u_2 \cdot u_3 = 0.$$

Zbytek matice je tedy zadán dvěma reálnými charakteristikami, které můžeme nazvat křivostí κ a torzí τ . $\square$

Porovnáme-li matici z tvrzení s Gramovou maticí z důkazu, můžeme vyčíst klasické definice těchto invariantů:

$$\kappa := u'_1 \cdot u_2 = \|u'_1\|, \quad \tau := u'_2 \cdot u_3.$$

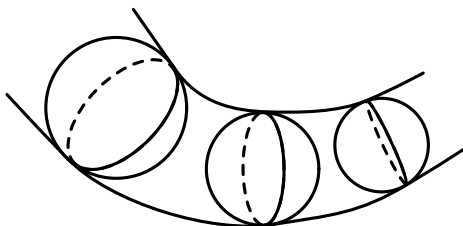
Geometrickým významem křivosti κ je dle [3] převrácená hodnota poloměru *oskulační kružnice*, tedy kružnice aproximující křivku v daném bodě. Torze τ pak určuje odchýlení od roviny této kružnice, tedy měří, jak moc křivka není rovinná.

Cvičení 1. *Jak vypadá prostorová křivka, jejíž křivost, torze a tudíž i celá invariantní matice jsou konstantní?*

Řešení této otázky bude podrobněji rozebráno v kapitole 5. Necháme-li se však vést pouhou intuicí, už nyní jej můžeme uhádnout. Má-li křivka nulovou křivost, jinými slovy není vůbec „křivá“, jde o přímku. Má-li křivka nenulovou konstantní křivost a nulovou torzi, je rovinná a všude stejně „křivá“, takže kružnice. Je-li nakonec křivka všude stejně křivá i odchýlená od oskulační roviny, jde o šroubovici.

4. INVARIANTY PŘÍMKOVÝCH PLOCH

Jak již bylo uvedeno, v této části se chystáme zobecnit provedenou konstrukci invariantního repéru a tu pak aplikovat na křivku v prostoru přímek, tedy přímkovou plochu. Na konci kapitoly pak nalezené invarianty porovnáme s již známými systémy invariantů pro přímkové plochy, a sice se Sanniovými a Kühnelovými. Nutno dodat, že kromě prostoru přímek platí zmíněná zobecnění i univerzálněji. Jednak v případě jiných metrických struktur, přičemž by šlo uvažovat například varietu sfér, kde by křivkou byla tzv. *kanálová plocha*, a jednak i v případě jiných homogenních struktur zadaných jinými grupami transformací, jako např. projektivní, afinní a jiné.



Obrázek 4. Kanálová plocha

V homogenním prostoru s obecnou grupou transformací G hraje roli pohyblivého repéru křivka transformací $c(t) \in G$, jež je tzv. *liftem* křivky $\gamma(t)$ do grupy G . To znamená, že v každém bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ jde o shodnost $c(t_0) : O \mapsto \gamma(t_0)$, kde O je počátek homogenního prostoru. V eukleidovském prostoru je takový lift totiž v jednoznačné korespondenci s výše zmíněným repérem $F(t)$, neboť pro bod $t_0 \in \mathbb{R}$ a repér $F(t_0)$ je $c(t_0) \in G$ jediná shodnost zobrazující standardní ortonormální repér E na repér $F(t_0)$:

$$c(t_0) : E = (O, e_1, e_2, e_3) \mapsto (\gamma(t_0), u_1(t_0), u_2(t_0), u_3(t_0)) = F(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Pojmy lift a repér budeme tedy v textu zaměňovat a společně značit jako $F(t)$.

Požadavkem k nalezení invariantní matice Ω je tedy nějaký kanonický způsob konstrukce liftu $F(t) \in G$, navíc s kanonickým parametrem t , které jsou invariantní vůči transformacím $\gamma \mapsto g\gamma, g \in G$. Matici pak můžeme v každém bodě křivky spočítat jako

$$\Omega = F^{-1} F'.$$

Poznámka 1. Matice $\Omega = F^{-1}F'$ je dokonce vektorem tečné algebry $\mathfrak{g} = T_e G$. V každém bodě $g = F(t_0) \in G$ jde totiž o obraz vektoru $F'(t_0)$ v tzv. Maurer-Cartanově formě

$$\omega_g = (L_{g^{-1}})_* : T_g G \rightarrow T_e G = \mathfrak{g}.$$

Pro grupu shodností v prostoru pak vektory algebry $\mathfrak{g}$ chápeme jako nepatrné pohyby prostoru ve smyslu translace + rotace. Odpovídající matice jsou pak tvaru

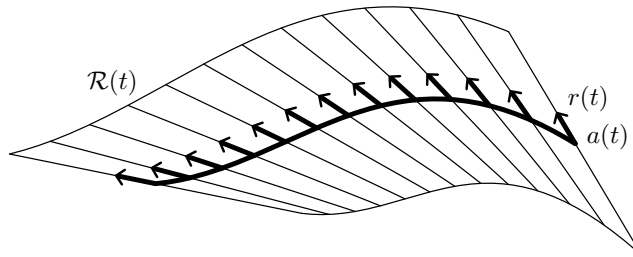
$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ w_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ w_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{array} \right),$$

kde první sloupec $(w_i)^T$ značí směr translace daného pohybu a antisymetrický blok B směr rotace. Ve skutečnosti blok B reprezentuje operátor, který otáčí daným vektorem kolem osy $(b_i)^T$, což lze zadat lineárním předpisem $u \mapsto (b_i)^T \times u$. Konkrétně pak složka b_i odpovídá rotaci kolem i -té souřadné osy. Nakonec, v prvním řádku matice jsou nuly, protože v matici shodnosti grupy G je první řádek konstantní.

Přímková plocha

Přímkovou plochou rozumíme plochu $\mathbf{x}(s, t)$, kterou lze vytvořit pohybem *tvořící přímky* po dané *řídící křivce*. Každým bodem takové plochy lze tedy vést přímku, která na ploše celá leží. Jelikož se nacházíme opět v metrickém prostoru s grupou shodností G , můžeme přímkovou plochu parametrizovat užitím řídící křivky $a = (1, a_1, a_2, a_3)^T$ a tzv. *směrové křivky* $r = (0, r_1, r_2, r_3)^T$ s jednotkovou velikostí:

$$\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = a(t) + sr(t), \quad \|r\| = 1. \quad (3)$$



Obrázek 5. Přímková plocha

Přímkové plochy můžeme rozdělit podle jisté míry degenerovanosti:

$$\dim\langle c', r, r' \rangle = \begin{cases} 1 \dots \text{singulární,} \\ 2 \dots \text{torzální neboli rozvinutelné,} \\ 3 \dots \text{netorzální neboli zborcené,} \end{cases}$$

přičemž dále v textu uvažujeme pouze přímkové plochy *necylindrické*, což jsou takové, jejichž směrová křivka splní $r' \neq 0$. Spolu s předpokladem $\|r\| = 1$ tato podmínka eliminuje přímkové plochy singulární.

Parametrizace (3) však není pro obecnou přímkovou plochu jednoznačná, neboť jako řídicí křivku lze uvážit libovolnou křivku protínající tvořící přímky. Pro necylindrickou přímkovou plochu lze však jednu řídicí křivku nalézt přirozeně s využitím metriky:

$$\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = c(t) + sr(t), \quad \|r\| = 1, \quad c' \cdot r' = 0. \quad (4)$$

Řídicí křivka $c(t)$ se v takovém případě nazývá *strikční*, stejně jako její body. Strikční bod $c(t_0)$ je na tvořící přímce $\mathcal{R}(t_0)$ právě jeden a lze nalézt vzorcem

$$c = a - \frac{a' \cdot r'}{r' \cdot r'} r,$$

odtud dále v textu uvažujeme řídicí křivku vždy strikční a značme ji c .

Dle [1] se geometricky tento bod na dvou blízkých mimoběžných tvořících přímkách nachází v místech nejmenší vzdálenosti těchto přímek, čili v místě průsečíku mimoběžek s jejich společnou kolmicí.

Další nejednoznačnost se striktně vzato objevuje v možné záměně směrové křivky za opačnou, tedy $r(t) \leftrightarrow -r(t)$. Tu si ale dovolíme neřešit, jelikož na systém invariantů nemá vliv.

Pohyblivý repér přímkové plochy

Dle výše uvedeného zobecnění postupu pro nalezení invariantní matice Ω se pokusme najít přirozenou konstrukci repéru $F(t)$ jakožto křivky shodností, která by dle odvození měla zobrazovat

$$F(t_0) : \mathcal{O} \mapsto \mathcal{R}(t_0), \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Matice shodností tedy budeme hledat ve tvaru

$$F = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & r_1 & \cdot & \cdot \\ c_2 & r_2 & \cdot & \cdot \\ c_3 & r_3 & \cdot & \cdot \end{array} \right) \in G.$$

Zbytek matice F může být opět přirozeně doplněn ortonormalizací repéru $\alpha = (c, r, r', r'')$, podobně jako v případě prostorové křivky:

$$u_1 = r, \quad u_2 = \frac{r'}{\|r'\|}, \quad u_3 = u_1 \times u_2. \quad (5)$$

Kromě tohoto se ještě nabízí doplnit repér pomocí derivace křivky strikční, tedy ortonormalizací repéru $\beta = (c, r, c', \cdot)$, přičemž na posledním vektoru při ortonormalizaci nezáleží. Zavedením strikční křivky však dostáváme $c' \cdot r' = 0$, což s jednotkovou velikostí vektoru r dohromady zadává kolmost $r' \perp \langle c', r \rangle$. Vektor $u_2 \approx r'$ bychom tedy dostali jako třetí vektor ortonormalizované báze a výsledný repér by tak byl totožný s výše zmíněným repérem $F = (c, u_1, u_2, u_3)$ až na prohození vektorů.

Posledním krokem bude přidat požadavek na jednoznačnost parametru t , přičemž zde máme dvě přirozené možnosti. Buďto parametrizovat obloukem strikční křivku $c(t)$ nebo směrovou křivku $r(t)$.

Sanniovy invarianty

Uvažme nejprve oblouk vzhledem ke strikční křivce $c(t)$, čili $\|c'(t)\| = 1$, a pokusme se nalézt tvar invariantní matice Ω_S vzhledem k repéru $F = (c, u_1, u_2, u_3)$. Aby byla tato parametrizace možná, musíme se omezit pouze na přímkové plochy s regulární strikční křivkou. Této podmínce nevyhoví obecně plochy kuželové.

Tvrzení 2. *Je-li dána přímková plocha $\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = c(t) + sr(t)$ s regulární strikční křivkou $c(t)$ parametrizovanou obloukem, její invariantní matice Ω_S vzhledem k výše zmíněnému repéru F je ve tvaru*

$$\Omega_S = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\sigma(t)) & 0 & -\kappa(t) & 0 \\ 0 & \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ \sin(\sigma(t)) & 0 & \tau(t) & 0 \end{array} \right), \quad (6)$$

přičemž charakteristiky $\kappa > 0, \tau$ a σ označme jako křivost, torze a strikce přímkové plochy.

Důkaz. Ověříme opět tuto podobu matice Ω_S ze vztahu

$$(c, u_1, u_2, u_3) \cdot \Omega_S = (c', u'_1, u'_2, u'_3),$$

ze kterého stejně jako v důkazu tvrzení 1 plyne tvar rozšířené Gramovy matice:

$$\Omega_S = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c' \cdot u_1 & u'_1 \cdot u_1 & u'_2 \cdot u_1 & u'_3 \cdot u_1 \\ c' \cdot u_2 & u'_1 \cdot u_2 & u'_2 \cdot u_2 & u'_3 \cdot u_2 \\ c' \cdot u_3 & u'_1 \cdot u_3 & u'_2 \cdot u_3 & u'_3 \cdot u_3 \end{array} \right). \quad (7)$$

První sloupec zde zdůvodníme nulovostí součiny $c' \cdot u_2 \approx c' \cdot r'$ a jednotkovou velikostí vektoru c' , díky čemuž tento vektor můžeme vyjádřit jako

$$c' = \cos(\sigma)u_1 + \sin(\sigma)u_3.$$

Invariant σ , který nazveme *strikcí*, označuje odchylku tečného vektoru c' od vektoru u_1 a tedy od tvořící přímky. Zbytek důkazu je pak analogický s Frenetovou–Serretovou konstrukcí použitou v důkazu tvrzení 1. $\square$

Invarianty, které lze vzhledem k důkazu definovat jako

$$\kappa := u'_1 \cdot u_2 = \|u'_1\|, \quad \tau := u'_2 \cdot u_3,$$

nazvěme také *křivostí* a *torzí* pro zachování významu ve Frenetové–Serretové konstrukci. Křivkou, kterou však tyto charakteristiky tradičně popisují, je tzv. *integrální křivka* směrové křivky r , tj. křivka eukleidovského prostoru $\gamma(t)$, jejíž tečným vektorem v každém bodě je směr $\gamma'(t) = r(t)$.

Zmíněný ortonormální repér, stejně tak jako systém invariantů, popsal G. Sannia v roce 1925, jak uvádí publikace [1], která je pro tento text velkou inspirací.

Invarianty jsou v oné knize odvozené podobným způsobem, ale z lehce odlišného úhlu pohledu. Mimo to jsou zde vyjádřeny také charakteristiky vnitřní geometrie plochy jako například Gaussova křivost pomocí právě tohoto systému invariantů. Díky tomu lze kupříkladu strikční bod charakterizovat jako bod tvořící přímky s minimální (tedy nejvíce zápornou) Gaussovou křivostí nebo zdůvodnit, proč je tato křivost pro torzální plochy vždy nulová a pro netorzální záporná.

Zajímavostí také je, že v popisu vnitřní geometrie přímkové plochy se vyskytuje pouze křivost a strikce, torze oproti tomu popisuje až vložení dané plochy do okolního eukleidovského prostoru.

Cvičení 2 (*Invarianty hyperbolického paraboloidu*). Uvažme plochu zadanou rovnicí

$$z = xy,$$

jejíž parametrizaci $\mathcal{R}(t) = \mathbf{x}(s, t) = a(t) + sr(t)$ lze zadat křivkami

$$a(t) = (1, t, 0, 0)^T, \quad r(t) = \frac{(0, 0, 1, t)^T}{\|(0, 0, 1, t)^T\|}$$

a spočítejme uvedeným postupem Sanniovy invarianty. Řídící křivkou $a(t) = c(t)$ je zde přímka, která je již strikční, neboť platí $a' \cdot r' = 0$, a je již parametrizována obloukem, čili $\|c'\| = 1$. Zbývá tedy doplnit repér $F = (c, r, \cdot, \cdot)$ dle vzorců (5):

$$F = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & -\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & 0 \end{array} \right) \in G,$$

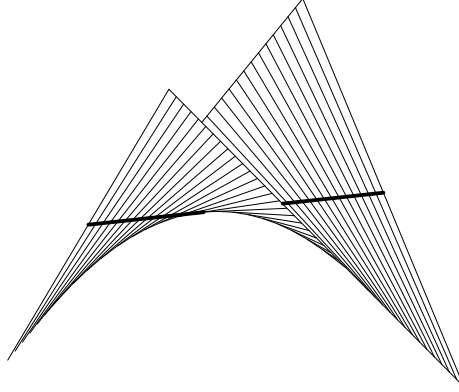
$$\Omega_S = F^{-1}F' = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Tato plocha má tedy konstantní strikci $\sigma = \pi/2$, takže všechny tvořící přímky jsou kolmé na řídící přímku. Nenulová strikce také znamená, že jde o plochu netorzální. Její křivost je pak nekonstantní a torze nulová, což je typické pro tzv. konoidy, tj. přímkové plochy, jejíž všechny tvořící přímky jsou rovnoběžné s nějakou rovinou.

Kühnelovy invarianty

V této sekci rozeberme druhou přirozenou parametrizaci, a to obloukem vzhledem k řídící křivce. Pro odlišení píšme nový parametr $\mathbf{t}$ namísto t a derivaci podle něj značme tečkou. Nová parametrizace nechť tedy splňuje $\|\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{t})\| = 1$. Výhodou této konstrukce je, že můžeme opět uvažovat i přímkové plochy se strikční křivkou singulární, tedy plochy kuželové. Uvažovaný repér je tedy tvaru

$$u_1 = r, \quad u_2 = r', \quad u_3 = u_1 \times u_2.$$



Obrázek 6. Hyperbolický paraboloid

Tvrzení 3. Je-li dána přímková plocha $\mathcal{R}(\mathfrak{s}) = \mathbf{x}(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = c(\mathfrak{t}) + \mathfrak{s}r(\mathfrak{t})$ se strikční řídicí křivkou $c(\mathfrak{t})$ a se směrovou křivkou $r(\mathfrak{t})$ parametrizovanou obloukem, její invariantní matice Ω_K vzhledem k repéru $F = (c, u_1, u_2, u_3)$ definovaném výše je ve tvaru

$$\Omega_K = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathcal{F}(\mathfrak{t}) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathcal{J}(\mathfrak{t}) \\ \lambda(\mathfrak{t}) & 0 & \mathcal{J}(\mathfrak{t}) & 0 \end{array} \right),$$

přičemž charakteristiky $\mathcal{F}, \mathcal{J}$ a λ označme jako Kühnelovy invarianty.

Důkaz. Důkaz bude v tomto případě velice podobný důkazu tvrzení 2 o Saniových invariantech. Na rozdíl od něj však tečný vektor strikční křivky $\dot{c}$ nemá jednotkovou velikost, a tak je třeba jej vyjádřit pomocí dvou kvantit

$$\dot{c} = \mathcal{F}u_1 + \lambda u_3$$

a vektor u_2 je přímo roven derivaci $\dot{r} = \dot{u}_1$, z čehož plyne součin

$$\dot{u}_1 \cdot u_2 = \dot{r} \cdot \dot{r} = 1.$$

□

Tyto invarianty jsme našli pouze v knize [2], proto jsme je nazvali po W. Kühnelovi. Autor zde však nekonstruuje repér, nýbrž je zavádí rovnou vzorci:

$$\mathcal{F} := \dot{c} \cdot r, \quad \lambda := \det(\dot{c}, r, \dot{r}), \quad \mathcal{J} := \det(r, \dot{r}, \ddot{r}).$$

Pro jejich ztotožnění s prvky naší matice počítejme

$$\mathcal{F} := \dot{c} \cdot r,$$

$$\lambda := \det(\dot{c}, r, \dot{r}) = \dot{c} \cdot (r \times \dot{r}) = \dot{c} \cdot (u_1 \times u_2) = \dot{c} \cdot u_3,$$

$$\mathcal{J} := \det(r, \dot{r}, \ddot{r}) = \ddot{r} \cdot (r \times \dot{r}) = \dot{u}_2 \cdot (u_1 \times u_2) = \dot{u}_2 \cdot u_3,$$

přičemž tyto rovnosti postupně zdůvodníme determinantem jakožto smíšeným součinem, definicí vektorů u_1, u_2 a u_3 a nakonec nahlédnutím do odpovídající Gramovy matice tvaru (7).

Cvičení 3 (*Invarianty Plückerova konoidu*). *Uvažme plochu*

$$\mathcal{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{s}r(\mathbf{t}),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = (1, 0, 0, \sin(2\mathbf{t}))^T, \quad r(\mathbf{t}) = (0, \cos(\mathbf{t}), \sin(\mathbf{t}), 0)^T$$

a spočítejme uvedeným postupem Kühnelovy invarianty. Křivka $\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{c}(\mathbf{t})$ je opět přímkou, která je již strikční, neboť platí $\dot{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$, a směrová křivka je již parametrizována obloukem, čili $\|\dot{\mathbf{r}}\| = 1$. Repér $F = (\mathbf{c}, r, \cdot, \cdot)$ tedy dle vzorců (5) doplníme

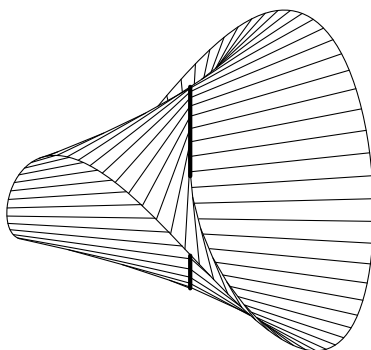
$$F = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\mathbf{t}) & -\sin(\mathbf{t}) & 0 \\ 0 & \sin(\mathbf{t}) & \cos(\mathbf{t}) & 0 \\ \sin(2\mathbf{t}) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in G,$$

$$\Omega_K = F^{-1}\dot{F} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\cos(2\mathbf{t}) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

Pro Kühnelovy invarianty tedy platí

$$\mathcal{F} = 0, \quad \lambda = 2\cos(2\mathbf{t}), \quad \mathcal{J} = 0$$

Z jejich tvaru můžeme opět vyčíst jisté vlastnosti. Nulovost $\mathcal{F} = \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r}$ znamená, že tvořící přímky jsou opět kolmé na řidici, nenulovost $\lambda = \det(\dot{\mathbf{c}}, r, \dot{r})$ říká, že plocha je netorzální, a nulovost $\mathcal{J} = \det(r, \dot{r}, \ddot{r})$, že směrová křivka je planární, tedy že tvořící přímky jsou všechny opět rovnoběžné s nějakou rovinou a plocha je tak oprávněně nazvaná konoidem.



Obrázek 7. Plückerův konoid

Na závěr ještě odvozené systémy invariantů porovnejme mezi sebou, a to pomocí tzv. *reparametrizace* $f : t \mapsto \mathbf{t}$. Vzhledem k té zde pouze stručně naznačíme výpočty

$$\kappa = \|r'\| = f'\|\dot{r}\| = f',$$

$$\Omega_S = F^{-1}F' = f'(F^{-1}\dot{F}) = f'\Omega_K,$$

ze kterých odvodíme vztahy

$$\mathcal{F} = \frac{\cos(\sigma)}{\kappa}, \quad \lambda = \frac{\sin(\sigma)}{\kappa}, \quad \mathcal{J} = \frac{\tau}{\kappa}.$$

5. HOMOGENNÍ PŘÍMKOVÉ PLOCHY

Homogenní křivky v homogenních prostorech

V této sekci si připomeneme Cvičení 1, jenž řeší otázku křivek s invariantní maticí Ω konstantní, přičemž tyto křivky nazveme *homogenními*.

V prvních odstavcích textu jsme definovali homogenní prostor jako prostor s tranzitivní akcí nějaké grupy G . Homogenní podprostor, zejména křivku, pak definujeme jako podprostor, na kterém působí tranzitivně nějaká podgrupa $H \subseteq G$. V případě křivky navíc díky libovolné volbě počátku O homogenního prostoru můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je tímto počátkem právě krajní bod homogenní křivky $O := \gamma(0)$. Díky tranzitivitě podgrupy H pak existuje jednoparametrická podgrupa $F(t) \in H, F(t) : O \mapsto \gamma(t)$, která jednak plní funkci liftu křivky γ (a tak je opět můžeme zaměňovat) a jednak tuto křivku stabilizuje, čili zobrazí samu na sebe, a to vztahem:

$$F(t) : \gamma(s) \mapsto \gamma(t+s).$$

Křivka γ je tedy shodná sama se sebou skrze třídu shodností, které danou křivku posouvají po celé své délce. Díky invariantnosti matice Ω to znamená, že je tato matice po celé délce křivky opravdu konstantní. Navíc, zvolíme-li křivku $F(t) \in H$ tak, aby procházela neutrálním prvkem $F(0) = e \in G$ (čehož lze případně docílit jinou volbou $\tilde{F}(t) := F(t)F(0)^{-1} \in A$), můžeme invariantní matici Ω vyjádřit jako:

$$\Omega = \Omega(0) = F(0)^{-1}F'(0) = F'(0).$$

Máme-li naopak zadanou matici Ω , jež je dle Poznámky 1 vektorem tečného prostoru $\mathfrak{g} = T_e G$, můžeme pomocí *exponenciálního zobrazení* naopak nalézt jednoparametrickou podgrupu

$$F(t) = \exp(t\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\Omega)^k,$$

jejíž invariantní matice je právě Ω .

Homogenní křivka obecně nemusí mít jedinou jednoparametrickou stabilizační podgrupu. Uvažme například přímku, která je stabilizována jednak translačním pohybem v jejím směru, ale také řadou pohybů šroubových.

Již máme dostatek nástrojů pro kompletní řešení zmíněného Cvičení 1. Pro konstantní matici Ω tvaru

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & \tau & 0 \end{array} \right)$$

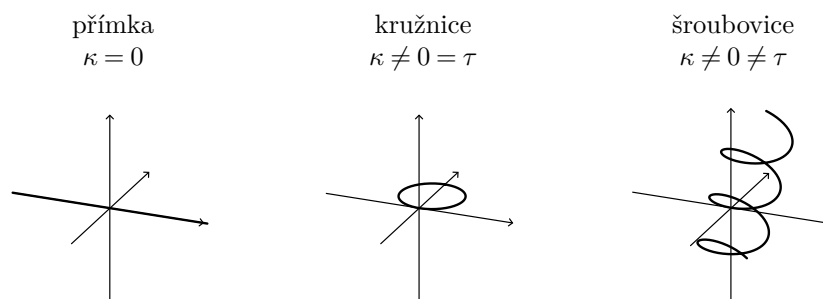
nejprve spočítejme explicitní předpis repéru $F(t) = \exp(t\Omega) \in G$ a křivku γ pak vyjádříme zobrazením $\gamma(t) := F(t)(O)$, tedy jako první sloupec repéru. Pro jednoduchost matice Ω , zejména její vysoký počet 0, lze křivku vyjádřit vcelku kompaktně:

$$\gamma(t) := \left(1, \frac{\tau^2 t n + \sin(nt) \kappa^2}{n^3}, \frac{\kappa(1 - \cos(nt))}{n^2}, \frac{\kappa \tau (nt - \sin(nt))}{n^3} \right)^T, \quad n := \sqrt{\kappa^2 + \tau^2},$$

případně je-li $\kappa = \tau = 0$:

$$\gamma(t) := (1, t, 0, 0)^T.$$

Všimněme si, že tento předpis dává dobrý smysl i v případě nulovosti daných konstant, přestože je to striktně vzato proti podmínkám uvedené konstrukce invariantní matice. Pro $\kappa = 0$ nám totiž vyjde přímka, což je křivka, jejíž každý bod je inflexní. Repér této přímky se navíc buď podél ní pouze posouvá (při $\tau = 0$) nebo šroubuje (při $\tau \neq 0$). Pro $\kappa \neq 0$ nám pak v závislosti na torzi τ vyjde kružnice nebo šroubovice, jak je uvedeno v tabulce 1.



Tabulka 1. Homogenní prostorové křivky

Klasifikace homogenních přímkových ploch

V této kapitole naznačme možný způsob klasifikace homogenních přímkových ploch pomocí právě zavedených nástrojů homogenního prostoru.

Upozorníme, že v tomto textu se zabýváme přímkovými plochami, které odpovídají homogenním křivkám na varietě přímek, tj. které mají alespoň jednoparametrickou grupu symetrií. Rozlišme však tuto kategorii od přímkových ploch, které jsou současně homogenními plochami v tom smyslu, že mají alespoň dvojparametrickou grupu symetrií tranzitivní po celé ploše. Ty jsou totiž pouze částí námi uvažovaných homogenních ploch.

Dle předchozí sekce je výhodné, aby pohyblivý repér dané homogenní křivky procházel identitou $F(0) = e \in G$. Zabývejme se proto otázkou, kdy jsou v homogenním prostoru shodné dvě homogenní křivky procházející počátkem, tj. kdy nastane

$$\bar{\gamma} = h\gamma, \quad h \in G_{\mathcal{O}}^2,$$

přičemž připomeňme, že $G_{\mathcal{O}}^2$ jsou právě shodnosti stabilizující počáteční přímku $\mathcal{O}$. Pro tento vztah lze odvodit postačující podmínku

$$\bar{\Omega} = h\Omega h^{-1}, \quad (8)$$

neboť pak platí

$$\bar{\gamma} = [\exp(t\bar{\Omega})G_{\mathcal{O}}^2] = [\exp(th\Omega h^{-1})G_{\mathcal{O}}^2] = [h\exp(t\Omega)h^{-1}G_{\mathcal{O}}^2] = h\gamma.$$

Tato podmínka není v obecné geometrii nutná, v případě $\mathbb{E}^3$ však její nutnost plyne z tzv. *reduktivity* algebry $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathfrak{so}(3)$. Pro více detailů odkažme na [5].

Chceme-li tedy rozlišit třídy shodných homogenních přímkových ploch, stačí rozlišit třídy vektorů Ω tečné algebry $\mathfrak{g}$ navzájem shodných vzhledem k uvedené adjunkci, přičemž tvar obecné matice Ω jsme zdůvodnili už v Poznámce 1.

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ w_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ w_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{g}, \quad h = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{32} & r_{33} \end{array} \right) \in G_{\mathcal{O}}^2$$

Zvolíme-li konkrétní transformaci $h \in G_{\mathcal{O}}^2$ s těmito koeficienty:

$$a_1 := \frac{b_3 w_2 - b_2 w_3}{N^2}, \quad R := \frac{1}{N} \begin{pmatrix} b_3 & -b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad N := \sqrt{b_2^2 + b_3^2},$$

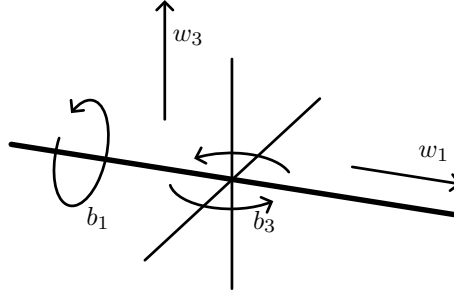
můžeme každý vektor třídy adjunkce upravit do následujícího čtyřparametrického tvaru

$$h\Omega h^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -N & 0 \\ 0 & N & 0 & -b_1 \\ \frac{b_2 w_2 + b_3 w_3}{N} & 0 & b_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & -\tilde{b}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_3 & 0 & -b_1 \\ \tilde{w}_3 & 0 & b_1 & 0 \end{array} \right) = \tilde{\Omega}. \quad (9)$$

Protože matici Ω lze jakožto matici infinitezimální změny pohybu $F'(t)$ rozdělit na translační část v prvním sloupci a rotační část ve zbylých sloupcích, je výhodné pojmenovat only čtyři parametry takto:

- w_1 – podélná translace
- w_3 – příčná translace
- b_1 – podélná rotace
- b_3 – příčná rotace

Dosadíme-li tuto matici do exponenciálního zobrazení, získáme právě homogenní pohyblivý repér $F(t) = \exp(t\tilde{\Omega})$ a obvyklým způsobem pak i odpovídající

Obrázek 8. Význam parametrů w_1, w_3, b_1, b_3

homogenní přímkovou plochu

$$F(t)(\mathcal{O}) = \mathcal{R}(t) = c(t) + sr(t)$$

již můžeme pro $b_1 = b_3 = 0$ explicitně vyjádřit:

$$c(t) := (1, tw_1, 0, tw_3)^T, \quad r(t) := (0, 1, 0, 0)^T$$

a pro $n := \sqrt{b_1^2 + b_3^2} > 0$:

$$c(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_3 \sin(nt)(b_3 w_1 - b_1 w_3)}{n^3} + \frac{tb_1(b_1 w_1 + b_3 w_3)}{(-1 + \cos(nt))(b_1 w_3 - b_3 w_1)} \\ \frac{b_1 \sin(nt)(b_1 w_3 - b_3 w_1)}{n^3} + \frac{tb_3(b_1 w_1 + b_3 w_3)}{n^2} \end{pmatrix}, \quad r(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos(nt)b_3^2 + b_1^2}{b_3 \sin(nt)} \\ \frac{(1 - \cos(nt))b_1 b_3}{n^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Řídicí křivka $c(t)$ je homogenní křivkou v $\mathbb{E}^3$, neboť je sama o sobě také zadána homogenním pohyblivým repérem $F(t)$. Křivka navíc v rámci plochy splňuje i podmínku strikční křivky, neboť první dva sloupce matice v (9) představují na sebe kolmé vektory c' a r' . Podobně je i směrová křivka $r(t)$ homogenní křivkou, a to na jednotkové sféře, tedy obecně kružnicí.

V souhrnu dostáváme klasifikaci homogenních přímkových ploch, kde každá třída je reprezentována čtveřicí $(w_1, w_3, b_1, b_3 \geq 0) \in \mathbb{R}^4$. Stejnou třídu však reprezentuje i čtveřice vynásobená společným násobkem λ , neboť tato záměna pouze konstantně přeškáluje parametr

$$F(t) = \exp(t\tilde{\Omega}) = \exp(\bar{t}\lambda\tilde{\Omega}).$$

Další záměny určující stejnou třídu pak najdeme už pouze u ploch cylindrických, jež jsou charakterizovány podmínkou $b_3 = 0$, jak uvidíme později.

Tvrzení 4. Každá shodnostní třída necylindrických homogenních přímkových ploch je jednoznačně určena čtveřicí $(w_1, w_3, b_1, b_3 > 0) \in \mathbb{R}^4$ až na záměnu

$$(w_1, w_3, b_1, b_3) \leftrightarrow \lambda(w_1, w_3, b_1, b_3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Navíc, zvolíme-li takovou společnou škálu λ , že platí $w_1^2 + w_3^2 = 1$, získáme rovnou čtveřici Sanniových invariantů dané homogenní přímkové plochy. Podobně, naškálujeme-li parametry tak, aby platilo $b_3 = 1$, získáme přímo invarianty Kühnelovy. Obecně jsou pak vztahy následující:

$$\kappa = \frac{b_3}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}}, \quad \tau = \frac{b_1}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}}, \quad \cos(\sigma) = \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}}, \quad \sin(\sigma) = \frac{w_3}{\sqrt{w_1^2 + w_3^2}},$$

$$\mathcal{F} = \frac{w_1}{b_3}, \quad \lambda = \frac{w_3}{b_3}, \quad \mathcal{J} = \frac{b_1}{b_3}.$$

Pomocí výše uvedených explicitních parametrizací dokážeme opět vyjádřit větší třídu ploch, než ke kterým umíme dopočítat Sanniovy a Kühnelovy invarianty. Bez překážek totiž vyjádříme homogenní plochu naprosto libovolnou, zejména i plochu cylindrickou, kuželovou nebo i singulární.

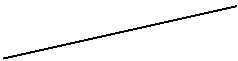
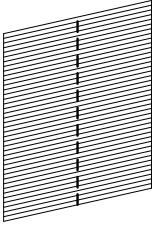
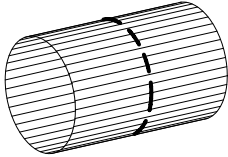
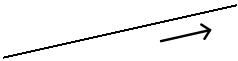
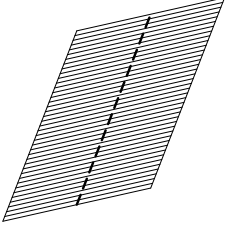
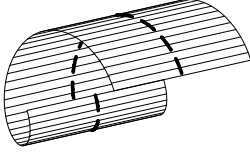
Cylindrická homogenní plocha je zde určena podmínkou $b_3 = 0$, neboť z předchozích vzorců plyne $b_3 \approx \kappa$ a z tvrzení 2 o Sanniových invariantech $\kappa = \|r'\|$. Kuželová plocha je pak zadána podmínkou $w_1 = w_3 = 0$, neboť tehdy je plocha tvořena pouze rotacemi přímky kolem počátku a žádnými translacemi. Nakonec, singulární je přímková plocha tehdy, je-li splněno $b_3 = w_3 = 0$. Pak totiž na tvořící přímku působí pouze podélná translace a rotace, což jsou pohyby, které tuto přímku ponechávají na místě.

Všechny uvedené vlastnosti a ještě některé další lze získat i dosazením nebo pohledem na předpis (10), což nám dává tento přehled podmínek:

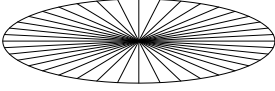
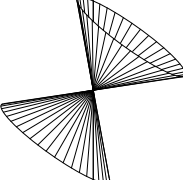
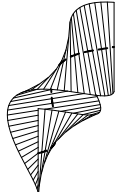
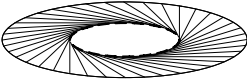
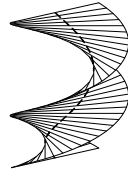
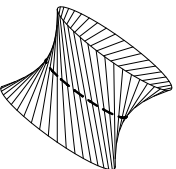
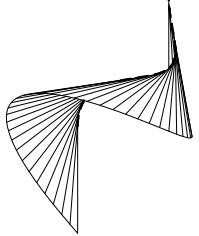
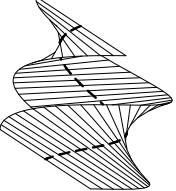
$b_3 = w_3 = 0$	singulární „plocha“
$b_3 \approx \kappa = \ r'\ = 0$	cylindrická plocha
$w_1 = w_3 = 0$	řídící křivkou je bod $\rightarrow$ kuželová plocha
$b_3 w_1 = b_1 w_3$	řídící křivkou je přímka
$b_1 w_1 = -b_3 w_3$	řídící křivkou je kružnice
$b_1 b_3 = 0$	tvořící přímky rovnoběžné s rovinou $\rightarrow$ konoidální plocha
$b_1 = 0$	tvořící přímky kolmé na řídící křivku

Další dělení tříd zejména podle nulovosti parametrů w_1, w_3, b_1, b_3 můžeme vidět v tabulkách 2 a 3, avšak mějme na paměti, že různé kombinace nám mohou dát stejnou plochu, přičemž záleží na úhlu pohledu. Kupříkladu rovinu jakožto podmnožinu prostoru získáme více kombinacemi, kdežto rozlišujeme-li různé přímkové plochy ve smyslu křivek na varietě přímek, tedy plochy s jinými uskupeními tvořících přímek, ztotožníme pouze roviny rovnoběžek s různými řídícími křivkami, podobně je tomu u kombinací zadávajících válce.

V tabulce 3 mimo jiné dochází k nutnosti ještě jednoho rozdělení, jelikož pouze nulovostmi parametrů od sebe nedokážeme odlišit obecnou šroubovou plochu od rotačního hyperboloidu, a tak tyto dvě plochy musíme rozlišit tvarem strikční křivky. Důsledkem však také je neexistence třídy označené „N/A“, neboť zadaným podmínkám nevyhoví žádné řešení.

cylindrické přímkové plochy $b_3 = 0$	
singulární $w_3 = 0$	regulární $w_3 \neq 0$
$w_1 = 0 = b_1$  přímka	 rovina rovnoběžek
$w_1 = 0 \neq b_1$  přímka	 válec
$w_1 \neq 0 = b_1$  přímka	 rovina rovnoběžek
$w_1 \neq 0 \neq b_1$  přímka	 válec

Tabulka 2. Třídy cylindrických homogenních přímkových ploch

necylindrické přímkové plochy $b_3 > 0$	
torzální $w_3 = 0$	netorzální $w_3 \neq 0$
$w_1 = 0 = b_1$  rovina různoběžek	 helikoid
$w_1 = 0 \neq b_1$  kužel	 šroubová plocha kolmic
$w_1 \neq 0 = b_1$  plocha tečen kružnice	 šroubový konoid
$w_1 \neq 0 \neq b_1$ $b_1 w_1 = -b_3 w_3$ N/A	 rotační hyperboloid
$w_1 \neq 0 \neq b_1$ $b_1 w_1 \neq -b_3 w_3$  plocha tečen šroubovice	 obecná šroubová plocha

Tabulka 3. Třídy necylindrických homogenních přímkových ploch

6. DALŠÍ HOMOGENNÍ PROSTORY

Závěrem textu uvedeme ještě několik příkladů neeukleidovských homogenních prostorů, ve kterých by šlo s jistými úpravami repér a invariantní matici také konstruovat. Velkou inspirací pro tento text byl článek [4], který podobným postupem konstruuje invarianty projektivní. Obecně je možné každý takový prostor kompletně popsat pouze zadáním grupy transformací G a stabilizátoru jakéhosi počátku H , neboť nosná množina pak může být opět ztotožněna s množinou levých tříd $M \cong G/H$. Nejtypičtějšími homogenními geometriemi pak mohou být například tyto:

nosná množina	grupa symetrií	název geometrie
standardní $\mathbb{R}^n$	afinní transformace	afinní
projektivní $\mathbb{RP}^n$	kolineace	projektivní
sféra S^n	konformní transformace	konformní
hyperbolický prostor H^n	Möbiovy transformace	hyperbolická

Různé geometrie na stejné nosné množině navíc může být často užitečné nějakým způsobem srovnávat, což nám Kleinův homogenní přístup také může umožnit. Na reálné, popřípadě projektivní rovině tak můžeme srovnat geometrii projektivní, afinní a eukleidovskou. Tuto rovinu tak můžeme ztotožnit s prostorem levých tříd G/H , přičemž grupu G budeme nahrazovat postupně grupou projektivních, afinních a eukleidovských transformací a podgrupu H odpovídajícími stabilizátory počátečního bodu O . Pro tyto grupy platí následující inkluze, která je již prvním jakýmsi uspořádáním těchto geometrií:

$$G^E \subseteq G^A \subseteq G^P \quad (11)$$

Další vztahy mezi geometriemi můžeme vidět například v otázkách klasifikačních. V textu jsme rozřazovali do tříd homogenní křivky, zde si porovnání ukažme na známějším příkladu klasifikace kuželoseček.

Kuželosečka q je v každé geometrii ekvivalentní kuželosečce r , jestliže je jedna obrazem druhé v nějaké transformaci $g \in G$. Zadáme-li tyto kuželosečky pomocí matic ve standardních souřadnicích, splňují tyto matice $Q = g^T R g$, jak je vidět ze zápisu

$$gq = \{gx \in \mathbb{R}^2, x^T Q x = 0\} = \{gx \in \mathbb{R}^2, (gx)^T R g x = 0\} = r.$$

Inkluze grup (11) nám pak říkají, že každé dvě eukleidovsky ekvivalentní kuželosečky jsou ekvivalentní i afinně a každé dvě afinně ekvivalentní jsou ekvivalentní i projektivně. Naopak to být však nemusí, jak ukazuje následující tabulka:

ekvivalence	hyperbola a elipsa	různě velké elipsy	shodné elipsy
projektivní	✓	✓	✓
afinní		✓	✓
eukleidovská			✓

Tuto skutečnost můžeme pozorovat i na úrovni invariantů, přičemž projektivním invariantem je tu nulovost determinantu matice kuželosečky, afinním nulovost nebo

znaménko jeho kvadratického subdeterminantu a eukleidovským samotný subdeterminant. Samozřejmě pak invariant vyšší geometrie je zároveň invariantem každé nižší, ale naopak to být nemusí.

REFERENCE

- [1] H. Pottman, J. Wallner: *Computational Line Geometry*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [2] W. Kühnel: *Differential Geometry* Student Mathematical Library, Volume 77, American Mathematical Society, 2015.
- [3] J. Šilhan, V. Žádník: *O křivkách a křivostech*, Kvaternion (2018), No. 1–2, 25–36.
- [4] B. Doubrov, I. Zelenko: *Geometry of curves in generalized flag varieties*, Transformation Groups, 2013, Volume 18, pp. 361–383.
- [5] R. V. Gamkrelidze, D. V. Alekseevskij, V. V. Lychagin, A. M. Vinogradov: *Geometry I: Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 28, Springer, 2010.

Matouš Trnka, Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita, Kotlářská 267/2, 611 37 Brno, Česká republika,
e-mail: `trnkam@math.muni.cz`

FLOQUETOVA TEORIE PRO LINEÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S PERIODICKÝMI KOEFCIENTY II

JIRÍ ŠREMR

ABSTRAKT. Článek je pokračováním příspěvku [3] publikovaném v tomto časopise v roce 2022 a má za cíl ukázat, jak je možné použít Floquetovu teorii v důkazech obecných kritérií Ljapunovské stability a nestability lineární diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty.

Uvažujeme diferenciální rovnici

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0, \tag{L}$$

v níž jsou koeficienty $p, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokálně lebesgueovsky integrovatelné ω -periodické funkce. Řešením rovnice (L) rozumíme funkci $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je absolutně spojitá spolu se svou derivací na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$ a která po dosazení splňuje rovnost (L) skoro všude v $\mathbb{R}$. Čtenáři, kteří nejsou zvyklí pracovat s rovnicemi s integrovatelnými koeficienty, mohou předpokládat, že koeficienty g a p jsou spojitě a řešení uvažovat ve třídě funkcí se spojitou 2. derivací.

V první části tohoto článku jsme ukázali alternativní možnost jak vybudovat základy Floquetovy teorie pro rovnici (L) s periodickými koeficienty. Inspirovali jsme se přístupem N. Sansoneho (viz např. [1, Hlava VI, §1]), definovali pojem Floquetova multiplikátoru a ukázali, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (L), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V tomto článku připomeneme koncept Ljapunovské stability lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu a ukážeme, jak je možné použít Floquetovu teorii v důkazech obecných kritérií stability a nestability.

1. LJAPUNOVSKÁ STABILITA

Pojem Ljapunovské stability obvykle zavádíme pro řešení soustav diferenciálních rovnic a poté odvádíme důsledky pro diferenciální rovnice vyšších řádů. Neboť se v tomto příspěvku budeme věnovat výhradně rovnici (L), připomeneme definice Ljapunovské stability formulované přímo pro řešení rovnice (L).

Poznamenejme, že zajímáme-li se o stabilitu řešení v okolí $+\infty$, stačí uvažovat rovnici (L) na nějakém okolí $+\infty$, například na poloose $[0, +\infty)$.

2020 MSC. Primární 34A30; Sekundární 34D05, 34C25.

Klíčová slova. Diferenciální rovnice 2. řádu, Floquetova teorie, Ljapunovská stabilita.

Definice 1.1. Řešení $x_0: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ rovnice (L) se nazývá:

- (1) **(ljapunovsky) stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a $t_0 \geq 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že libovolné řešení x rovnice (L) vyhovující podmínce

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| + |x'(t_0) - x'_0(t_0)| < \delta \quad (1.1)$$

splňuje nerovnost

$$|x(t) - x_0(t)| + |x'(t) - x'_0(t)| < \varepsilon \quad \text{pro } t \geq t_0;$$

- (2) **nestabilní**, jestliže není stabilní;
 (3) **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a pro každé $t_0 \geq 0$ existuje $\delta = \delta(t_0) > 0$ takové, že libovolné řešení x rovnice (L) vyhovující podmínce (1.1) splňuje

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x(t) - x_0(t)| + |x'(t) - x'_0(t)|) = 0;$$

- (4) **exponenciálně stabilní**, jestliže existuje $\eta > 0$ taková, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že libovolné řešení x rovnice (L) vyhovující v nějakém $t_0 \geq 0$ podmínce (1.1) splňuje nerovnost

$$|x(t) - x_0(t)| + |x'(t) - x'_0(t)| < \varepsilon e^{-\eta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

Poznámka 1.2. V literatuře lze najít na první pohled různé definice exponenciální stability řešení, v případě lineárních rovnic (i soustav) však tyto definice určují stejnou vlastnost.

Všimněme si, že z asymptotické stability řešení x_0 rovnice (L) okamžitě plyne jeho stabilita a z exponenciální stability jeho asymptotická stabilita. Opačná tvrzení však neplatí.

Jelikož je rovnice (L) lineární, lehce lze dokázat, že řešení x_0 rovnice (L) je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) právě tehdy, když je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) její nulové řešení. Odtud okamžitě plyne, že všechna řešení rovnice (L) jsou z pohledu stability „stejněho typu“, a proto obvykle mluvíme o stabilitě lineární rovnice místo o stabilitě jejích řešení.

Pro jednotlivé typy stability jsou k dispozici následující nutné a postačující podmínky, které nám dovolí rozhodnout o stabilitě rovnice (L), známe-li chování jejího fundamentálního systému řešení.

Tvrzení 1.3. *Rovnice (L) je:*

- (a) *stabilní právě tehdy, když každé její řešení x splňuje*

$$\sup \{|x(t)| + |x'(t)| : t \geq 0\} < +\infty. \quad (1.2)$$

- (b) *asymptoticky stabilní právě tehdy, když každé její řešení x splňuje*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0. \quad (1.3)$$

- (c) *exponenciálně stabilní právě tehdy, když existují čísla $\beta > 0$ a $N > 0$ taková, že každé řešení x rovnice (L) splňuje*

$$|x(t)| + |x'(t)| \leq N \left(|x(t_0)| + |x'(t_0)| \right) e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0 \geq 0.$$

Na závěr této kapitoly připomeneme, jak lze jednoduše rozhodnout o stabilitě diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$x'' + g_0 x' + p_0 x = 0, \quad (1.4)$$

kde $p_0, g_0 \in \mathbb{R}$. Jedná se zřejmě o speciální případ rovnice (L), přičemž její koeficienty jsou periodické s libovolnou periodou $\omega > 0$.

Tvrzení 1.4. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou kořeny charakteristické rovnice*

$$\lambda^2 + g_0 \lambda + p_0 = 0 \quad (1.5)$$

odpovídající diferenciální rovnici (1.4). Potom platí:

- (1) *Jestliže $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ a $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$, pak je rovnice (1.4) exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*
- (2) *Jestliže $\operatorname{Re} \lambda_1 \leq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 \leq 0$, existuje kořen s nulovou reálnou částí a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchý, pak je rovnice (1.4) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*
- (3) *Jestliže $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ nebo $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ pro nějaké $k \in \{1, 2\}$, pak je rovnice (1.4) nestabilní.*

V kapitole 3 dokážeme podobná kritéria pro rovnici (L) s periodickými koeficienty, známe-li oba její Floquetovy multiplikátory.

2. FLOQUETOVY MULTIPLIKÁTORY ROVNICE (L)

Pro pohodlí čtenáře připomeňme velmi stručně základní fakta, která jsou podrobně vysvětlena v příspěvku [3] a která budeme potřebovat k důkazu věty 3.1.

Otázka existence netriviálního řešení rovnice (L) s ω -periodickými koeficienty splňujícího podmínku

$$x(t + \omega) = \varrho x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

vede k následující definici a tvrzení.

Definice 2.1. Kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^2 - (u_1(\omega) + u_2'(\omega))\varrho + e^{-\int_0^\omega g(s)ds} = 0, \quad (2.2)$$

kde u_1 a u_2 jsou řešení rovnice (L) splňující počáteční podmínky

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0 \quad \text{a} \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1,$$

nazýváme **Floquetovy multiplikátory** diferenciální rovnice (L).

Tvrzení 2.2. *Rovnice (L) má netriviální (eventuálně komplexní) řešení splňující podmínku (2.1) právě tehdy, když je ϱ Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice (L).*

Definice 2.3. Necht $\varrho \in \mathbb{C}$ je Floquetův multiplikátor rovnice (L) s ω -periodickými koeficienty a necht $\varrho = |\varrho| e^{i\vartheta}$, kde $\vartheta \in (-\pi, \pi]$. Potom číslo

$$\alpha = \frac{1}{\omega} \ln |\varrho| + \frac{\vartheta}{\omega} i \quad (2.3)$$

nazýváme **Floquetův charakteristický exponent** rovnice (L).

Poznámka 2.4. V [3, Poznámka 1.7] jsme ukázali, že Floquetovy multiplikátory rovnice (L) jsou vlastní čísla matice monodromie $Y(\omega)$, kde Y je fundamentální matice soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -g(t) \end{pmatrix} y \quad (2.4)$$

splňující $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. To znamená, že Floquetovy multiplikátory rovnice (L) zavedené v definici 2.1 souhlasí s Floquetovými multiplikátory odpovídající soustavy (2.4)¹. Z Floquetovy teorie také vyplývá, že Floquetovy exponenty soustavy (2.4) jsou tvaru (2.3) až na případný aditivní člen $\frac{2k\pi i}{T}$, v němž $k \in \mathbb{Z}$.

V první části tohoto článku [3] jsme dokázali, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (L), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V následující větě označme $AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ množinu funkcí, které jsou absolutně spojitě spolu se svou derivací na každém kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 2.5. *Necht ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (L). Pak platí:*

- (1) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$, pak $\varrho_1 \varrho_2 > 0$ a existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$).

- (2) *Jestliže $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující buď*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

nebo

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_0|}{\omega} t} [t\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické (resp. 2ω -periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

- (3) *Jestliže $\varrho_{1,2} = \varrho_0 e^{\pm i\vartheta}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující*

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

¹Floquetovu teorii pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s periodickou maticovou funkcí je možné najít například v monografii [4].

$$a \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln \varrho_0}{\omega} t} \left[\varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce.

3. KRITÉRIA STABILITY/NESTABILITY V ŘEČI FLOQUETOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ

V této části dokážeme kritéria stability/nestability rovnice (L) v řeči jejích Floquetových multiplikátorů. Lze je dokázat různými způsoby (viz závěrečné poznámky v kapitole 4), my použijeme k důkazu tvrzení 2.5 o možné reprezentaci lineárně nezávislých řešení rovnice (L) a obecná kritéria stability formulovaná v tvrzení 1.3. V důkazech není potřeba žádný složitý matematický aparát, čtenář vystačí se základními znalostmi matematické analýzy a s vlastnostmi lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v rozsahu běžně probíraném v základních kurzech vysokoškolské matematiky.

Věta 3.1. *Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C}$ jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (L) s ω -periodickými koeficienty. Potom platí:*

- (1) *Jestliže $|\varrho_1| < 1$ a $|\varrho_2| < 1$, pak je rovnice (L) exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*
- (2) *Jestliže $|\varrho_k| > 1$ pro nějaké $k \in \{1, 2\}$, pak je rovnice (L) nestabilní.*
- (3) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $|\varrho_1| = 1$ a $|\varrho_2| < 1$, pak je rovnice (L) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*
- (4) *Nechť $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. Pak je rovnice (L) stabilní právě tehdy, když jsou všechna její řešení periodická. Je-li v tomto případě rovnice (L) stabilní, není stabilní asymptoticky.*
- (5) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$, pak je rovnice (L) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

Poznámka 3.2. Je-li ϱ Floquetův multiplikátor rovnice (L) a α k němu odpovídající Floquetův exponent, pak ze vztahu (2.3) okamžitě vyplývá, že

$$\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{\omega} \ln |\varrho|.$$

Tudíž $\operatorname{Re} \alpha < 0$ (resp. $\operatorname{Re} \alpha = 0$, resp. $\operatorname{Re} \alpha > 0$) právě tehdy, když $|\varrho| < 1$ (resp. $|\varrho| = 1$, resp. $|\varrho| > 1$).

Kritéria stability formulovaná ve větě 3.1 lze tedy jednoduše přeformulovat v řeči reálných částí Floquetových exponentů rovnice (L), které hrají v otázce její stability podobnou roli jako kořeny charakteristické rovnice (1.5) příslušné diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (1.4).

Důkaz věty 3.1. Pro libovolné řešení x rovnice (L) označíme

$$\|x(t)\| = |x(t)| + |x'(t)| \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení (1): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $|\varrho_1| < 1$, $|\varrho_2| < 1$ a necht x je libovolné řešení rovnice (L), $t_0 \geq 0$ je libovolný bod.

Všimněme si, že je-li x_1, x_2 fundamentální systém řešení rovnice (L), pak

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

kde c_1, c_2 splňují

$$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0), \quad x'(t_0) = c_1 x'_1(t_0) + c_2 x'_2(t_0),$$

tj. c_1, c_2 jsou dány vztahy

$$c_1 = \frac{x(t_0)x'_2(t_0) - x'(t_0)x_2(t_0)}{W[x_1, x_2](t_0)}, \quad c_2 = -\frac{x(t_0)x'_1(t_0) - x'(t_0)x_1(t_0)}{W[x_1, x_2](t_0)}. \quad (3.2)$$

Připomeňme, že $W[x_1, x_2]$ značí wronskián řešení x_1, x_2 , který je definován vztahem $W[x_1, x_2](t) := x_1(t)x'_2(t) - x'_1(t)x_2(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

(A) Nejprve předpokládejme, že $\varrho_1 \neq \varrho_2$. Pak jsou ϱ_1, ϱ_2 buď obě reálná nebo komplexně sdružená, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty.

Případ (A1): $\varrho_1 \neq \varrho_2$ a $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$.

Z části (1) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru (2.5), kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Položme

$$\beta_1 := -\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega}, \quad \beta_2 := -\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega}.$$

Derivací vztahů (2.5) dostaneme

$$\|x_k(t)\| = |x_k(t)| + |x'_k(t)| = e^{-\beta_k t} \left[|\varphi_k(t)| + |-\beta_k \varphi_k(t) + \varphi'_k(t)| \right]$$

pro $t \in \mathbb{R}$ a $k = 1, 2$. Funkce $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ jsou periodické, existuje proto konstanta $N_{A1} > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$\|x_k(t)\| \leq N_{A1} e^{-\beta_k t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2. \quad (3.3)$$

Z (2.5) navíc dostaneme

$$W[x_1, x_2](t) = \left[\varphi_1(t)(-\beta_2 \varphi_2(t) + \varphi'_2(t)) - (-\beta_1 \varphi_1(t) + \varphi'_1(t))\varphi_2(t) \right] e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Jelikož jsou řešení x_1, x_2 lineárně nezávislá, pro jejich wronskián platí $W[x_1, x_2](t) \neq 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, což spolu s periodičností funkcí $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ zaručí, že existuje konstanta $A_1 > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$|W[x_1, x_2](t)| \geq A_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Na druhé straně, konstanty c_1, c_2 dané vztahy (3.2) splňují

$$|c_{3-k}| = \frac{|x(t_0)x'_k(t_0) - x'(t_0)x_k(t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \leq \frac{\|x(t_0)\| \|x_k(t_0)\|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \quad \text{pro } k = 1, 2$$

a použitím odhadů (3.3) a (3.4) ve vztahu (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq |c_1| \|x_1(t)\| + |c_2| \|x_2(t)\| \\ &\leq \|x(t_0)\| \left[\frac{N_{A1} e^{-\beta_2 t_0}}{A_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t_0}} N_{A1} e^{-\beta_1 t} + \frac{N_{A1} e^{-\beta_1 t_0}}{A_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t_0}} N_{A1} e^{-\beta_2 t} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{N_{A1}^2}{A_1} \|x(t_0)\| \left[e^{-\beta_1(t-t_0)} + e^{-\beta_2(t-t_0)} \right] \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

To však znamená, že

$$\|x(t)\| \leq \frac{2N_{A1}^2}{A_1} \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0,$$

kde $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\} > 0$, což vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

Případ (A2): $\varrho_1 \neq \varrho_2$ a $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$.

Z části (3) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru (2.8) a (2.9), kde $\varrho_0 = |\varrho_1|$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce. Položme

$$\beta_3 := -\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega}.$$

Derivací vztahů (2.8), (2.9) a použitím periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ zjistíme, že existuje konstanta $N_{A2} > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$\|x_k(t)\| \leq N_{A2} e^{-\beta_3 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2. \quad (3.5)$$

Z (2.8) a (2.9) navíc dostaneme

$$W[x_1, x_2](t) = \left[\frac{\vartheta}{\omega} (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)) + \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t) \right] e^{-2\beta_3 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož jsou řešení x_1, x_2 lineárně nezávislá, jejich wronskián $W[x_1, x_2]$ je nenulový na $\mathbb{R}$, což spolu s periodičností funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ zaručí, že existuje konstanta $A_2 > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$|W[x_1, x_2](t)| \geq A_2 e^{-2\beta_3 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Nyní analogicky jako v předchozím případě ze vztahů (3.1), (3.2), (3.5) a (3.6) vyplývá

$$\|x(t)\| \leq \frac{2N_{A2}^2}{A_2} \|x(t_0)\| e^{-\beta_3(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0,$$

kde $\beta_3 > 0$, což vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

(B) Dále předpokládejme, že $\varrho_1 = \varrho_2$. Pak $\varrho_1, \varrho_1 \in \mathbb{R}$, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty, a z části (2) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující buď (2.6) nebo (2.7), kde $\varrho_0 = \varrho_1$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Položme

$$\beta_4 := -\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega}.$$

Případ (B1): $\varrho_1 = \varrho_2$ a x_1, x_2 jsou tvaru (2.6).

Analogickým způsobem jako v části (A1) dokážeme, že existují konstanty $N_{B1} > 0$ a $B_1 > 0$ nezávislé na řešení x a bodu t_0 takové, že

$$\|x(t)\| \leq \frac{2N_{B1}^2}{B_1} \|x(t_0)\| e^{-\beta_4(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0,$$

což vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

Případ (B2): $\varrho_1 = \varrho_2$ a x_1, x_2 jsou tvaru (2.7).

Pak

$$x'_1(t) = e^{-\beta_4 t} \psi_1(t), \quad x'_2(t) = e^{-\beta_4 t} [t\psi_1(t) + \psi_2(t)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

kde

$$\psi_1(t) := -\beta_4 \varphi_1(t) + \varphi'_1(t), \quad \psi_2(t) := -\beta_4 \varphi_2(t) + \varphi_1(t) + \varphi'_2(t). \quad (3.8)$$

Ze vztahů (3.1) a (3.2) dostaneme výrazy

$$x(t) = \frac{1}{W[x_1, x_2](t_0)} [W_1(t, t_0)x(t_0) + W_2(t, t_0)x'(t_0)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

a

$$x'(t) = \frac{1}{W[x_1, x_2](t_0)} [W_3(t, t_0)x(t_0) + W_4(t, t_0)x'(t_0)] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

v nichž

$$W_1(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [\varphi_1(t)\psi_2(t_0) - \varphi_2(t)\psi_1(t_0) - (t-t_0)\varphi_1(t)\psi_1(t_0)],$$

$$W_2(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [(t-t_0)\varphi_1(t)\varphi_1(t_0) + \varphi_1(t_0)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(t_0)],$$

$$W_3(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [\psi_1(t)\psi_2(t_0) - \psi_1(t_0)\psi_2(t) - (t-t_0)\psi_1(t)\psi_1(t_0)],$$

$$W_4(t, t_0) := e^{-\beta_4(t+t_0)} [(t-t_0)\varphi_1(t_0)\psi_1(t) + \varphi_1(t_0)\psi_2(t) - \varphi_2(t_0)\psi_1(t)].$$

Vzhledem k (3.8) a periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ odtud vyplývá, že existují konstanty $\tilde{N}_{B_2}^k > 0$ a $\hat{N}_{B_2}^k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, nezávislé na řešení x a bodu t_0 takové, že

$$|W_k(t, t_0)| \leq [\tilde{N}_{B_2}^k(t-t_0) + \hat{N}_{B_2}^k] e^{-\beta_4(t+t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.11)$$

Na druhé straně, z (2.7), (3.7) a (3.8) dostaneme

$$\begin{aligned} W[x_1, x_2](t) &= [\varphi_1(t)(t\psi_1(t) + \psi_2(t)) - \psi_1(t)(t\varphi_1(t) + \varphi_2(t))] e^{-2\beta_4 t} \\ &= [\varphi_1(t)\psi_2(t) - \varphi_2(t)\psi_1(t)] e^{-2\beta_4 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jelikož jsou řešení x_1, x_2 lineárně nezávislá, jejich wronskián $W[x_1, x_2]$ je nenulový na $\mathbb{R}$, což spolu s periodičností funkcí $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ zaručí, že existuje konstanta $B_2 > 0$ nezávislá na řešení x a bodu t_0 taková, že

$$|W[x_1, x_2](t)| \geq B_2 e^{-2\beta_4 t} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Tudíž, použitím odhadů (3.11), (3.12) ve vztazích (3.9), (3.10) získáme

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= |x(t)| + |x'(t)| \\ &\leq |x(t_0)| \frac{|W_1(t, t_0)| + |W_3(t, t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} + |x'(t_0)| \frac{|W_2(t, t_0)| + |W_4(t, t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sum_{k=1}^4 |W_k(t, t_0)|}{|W[x_1, x_2](t_0)|} \|x(t_0)\| \leq \frac{[\tilde{N}_{B2}(t - t_0) + \hat{N}_{B2}] e^{-\beta_4(t+t_0)}}{B_2 e^{-2\beta_4 t_0}} \|x(t_0)\| \\
&= \left[\frac{\tilde{N}_{B2}}{B_2} (t - t_0) e^{-\beta_4(t-t_0)} + \frac{\hat{N}_{B2}}{B_2} e^{-\beta_4(t-t_0)} \right] \|x(t_0)\| \quad \text{pro } t \geq t_0,
\end{aligned}$$

kde $\tilde{N}_{B2} = \sum_{k=1}^4 \tilde{N}_{B2}^k$ a $\hat{N}_{B2} = \sum_{k=1}^4 \hat{N}_{B2}^k$. Nyní si ještě všimněme, že existuje $M > 0$ takové, že

$$z e^{-\beta_4 z} \leq M e^{-\frac{1}{2}\beta_4 z} \quad \text{pro } z \geq 0,$$

a proto dostáváme

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{\tilde{N}_{B2}M}{B_2} + \frac{\hat{N}_{B2}}{B_2} \right) \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\beta_4(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geq t_0.$$

where $\beta_4 > 0$. Tento odhad vzhledem k tvrzení 1.3(c) a libovolnosti řešení x a bodu t_0 zaručí, že je rovnice (L) exponenciálně stabilní.

Tvrzení (2): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $|\varrho_1| > 1$. Zřejmě buď $\varrho_1 \in \mathbb{R}$ nebo $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(A) Nejprve předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{R}$. Z částí (1) a (2) tvrzení 2.5 vyplývá, že má rovnice (L) netriviální řešení x_1 splňující

$$x_1(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} \varphi_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ je 2ω -periodická funkce. Existuje tedy bod $t^* \in \mathbb{R}$ takový, že $\varphi_1(t^*) \neq 0$. Pak

$$x_1(t^* + n2\omega) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} (t^* + n2\omega)} \varphi_1(t^* + n2\omega) = e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} (t^* + n2\omega)} \varphi_1(t^*) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a proto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_1(t^* + n2\omega)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_1(t^*)| e^{\frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} (t^* + n2\omega)} = +\infty,$$

neboť $|\varrho_1| > 1$. Odtud dostáváme

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (|x_1(t)| + |x_1'(t)|) \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t)| = +\infty,$$

což vzhledem k tvrzení 1.3(a) zaručí, že je rovnice (L) nestabilní.

(B) Nyní předpokládejme, že $\varrho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$, neboť jsou ϱ_1, ϱ_2 řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty, a z části (3) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru (2.8) a (2.9), kde $\varrho_0 = |\varrho_1|$ a $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce. Příímým výpočtem lze jednoduše ověřit, že

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = e^{2 \frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Jelikož jsou x_1, x_2 lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (L), funkce x_1, x_2 nemohou mít žádný společný nulový bod. To však znamená, že $\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) > 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, což vzhledem k periodičnosti funkcí φ_1, φ_2 zaručí, že

$$m := \min \{ \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) : t \in \mathbb{R} \} > 0.$$

Ze vztahu (3.13) proto dostáváme

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} m e^{2 \frac{\ln |\varrho_1|}{\omega} t} = +\infty,$$

neboť $|\varrho_1| > 1$. Odtud vyplývá, že

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t)| = +\infty, \quad \text{nebo} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_2(t)| = +\infty,$$

což vzhledem k tvrzení 1.3(a) zaručí, že je rovnice (L) nestabilní.

Tvrzení (3): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $|\varrho_1| = 1$ a $|\varrho_2| < 1$. Z části (1) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 tvaru

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} t} \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Derivací těchto vztahů získáme

$$x_1'(t) = \varphi_1'(t), \quad x_2'(t) = e^{\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} t} \left[\frac{\ln |\varrho_2|}{\omega} \varphi_2(t) + \varphi_2'(t) \right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a vzhledem k předpokladu $|\varrho_2| < 1$ a periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ odtud dostáváme

$$\sup \{ |x_k(t)| + |x_k'(t)| : t \geq 0 \} < +\infty \quad \text{pro } k = 1, 2.$$

Jelikož je každé řešení rovnice (L) lineární kombinací fundamentálního systému řešení x_1, x_2 , z tvrzení 1.3(a) vyplývá, že je rovnice (L) stabilní. Netriviální řešení x_1 rovnice (L) je však periodické, a proto užitím tvrzení 1.3(b) zjistíme, že rovnice (L) není asymptoticky stabilní.

Tvrzení (4): Necht Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. Pak $\varrho_1 = \varrho_2$, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2).

(A) Nejprve předpokládejme, že je každé řešení rovnice (L) periodické. Libovolné netriviální řešení x rovnice (L) pak splňuje podmínku (1.2) (jeho derivace je totiž také periodická funkce), avšak nesplňuje podmínku (1.3). Z tvrzení 1.3 tak vyplývá, že je rovnice (L) stabilní, ale není asymptoticky stabilní.

(B) Nyní předpokládejme, že je rovnice (L) stabilní, a připuštěme, že má řešení, které není periodické. Pak z části (2) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) splňující

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = t\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou 2ω -periodické funkce. Je zřejmé, že existuje $t^* \geq 0$ takové, že $\varphi_1(t^*) \neq 0$. Z (3.14) pak dostáváme

$$x_2(t^* + n2\omega) = (t^* + n2\omega)\varphi_1(t^* + n2\omega) + \varphi_2(t^* + n2\omega) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} |x_2(t^* + n2\omega)| &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} |(t^* + n2\omega)\varphi_1(t^*) + \varphi_2(t^*)| \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[(t^* + n2\omega)|\varphi_1(t^*)| - |\varphi_2(t^*)| \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Řešení x_2 není tedy ohraničené na $[0, +\infty)$, což je vzhledem k tvrzení 1.3(a) ve sporu se stabilitou rovnice (L).

Tvrzení (5): Předpokládejme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 splňují $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. Pak $\varrho_2 = \overline{\varrho_1}$, neboť jsou to řešení kvadratické rovnice (2.2) s reálnými koeficienty, a z části (3) tvrzení 2.5 vyplývá, že existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice (L) tvaru

$$x_1(t) = \varphi_1(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

$$x_2(t) = \varphi_1(t) \sin \frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t) \cos \frac{\vartheta t}{\omega} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in AC_{loc}^1(\mathbb{R})$ jsou ω -periodické funkce a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Derivací vztahů (3.15), (3.16) a použitím periodičnosti funkcí $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ zjistíme, že jsou řešení x_1, x_2 ohraničená na $\mathbb{R}$ spolu se svými derivacemi. Jelikož je každé řešení rovnice (L) lineární kombinací fundamentálního systému řešení x_1, x_2 , z tvrzení 1.3 (a) vyplývá, že je rovnice (L) stabilní.

Na druhé straně, ze vztahů (3.15), (3.16) dostaneme

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Je-li

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0,$$

pak z (3.17) získáme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)) = 0,$$

což není možné, neboť φ_1, φ_2 jsou netriviální periodické funkce. Proto

$$\text{buď } \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_1(t)| > 0, \quad \text{nebo} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_2(t)| > 0,$$

odkud vzhledem k tvrzení 1.3(b) vyplývá, že rovnice (L) není asymptoticky stabilní. $\square$

4. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Věta 3.1 udává kompletní popis stability rovnice (L) v řeči jejích Floquetových multiplikátorů. Jednotlivá tvrzení však bohužel neobsahují efektivní kritéria stability a nestability, neboť Floquetovy multiplikátory nelze obecně jednoduše vypočítat. Možné použití této věty k důkazu jednoduchých kritérií, jejichž předpoklady lze snadno ověřit, jsme ukázali v příspěvku [2]. Je v něm také diskutována souvislost

Floquetových charakteristických exponentů s tzv. Ljapunovovými charakteristickými exponenty objevujícími se často v nelineární dynamice, a je ukázáno, jak lze Floquetovu teorii použít v důkazu stability dolního ekvilibria matematického kyvadla s vertikálně oscilujícím závěsem.

Větu 3.1 jsme dokázali použitím jednoduchého aparátu matematické analýzy. Podstatnou roli v důkazech však hrálo tvrzení 2.5 o možné reprezentaci fundamentálního systému řešení rovnice (L) v řeči Floquetových multiplikátorů, k jehož důkazu jsou potřeba pokročilejší partie Floquetovy teorie (viz [3, důkaz věty 2.6]). Jednotlivá tvrzení věty 3.1 jsou samozřejmě v souladu s fakty známými pro lineární soustavy diferenciálních rovnic s periodickou maticovou funkcí (viz např. [4, kapitola 2.7]):

- (a) Část (1) říká, že leží-li oba Floquetovy multiplikátory uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině, pak je rovnice (L) exponenciálně stabilní. Asymptotická stabilita v tomto případě vyplývá z Floquetovy teorie, důkaz exponenciální stability potřebuje další drobnou analýzu.
- (b) Část (2) říká, že leží-li alespoň jeden Floquetův multiplikátor vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, pak je rovnice (L) nestabilní.
- (c) Části (3)–(5) říkají, že leží-li Floquetovy multiplikátory v jednotkovém kruhu v komplexní rovině, avšak alespoň jeden multiplikátor leží na jeho hraniční kružnici, pak je rovnice (L) buď stabilní (ale ne asymptoticky stabilní), nebo nestabilní. Z Floquetovy teorie je známo, že v takovém případě je rovnice (L) stabilní právě tehdy, když každému multiplikátoru ležícímu na hraniční kružnici odpovídají pouze lineární elementární dělitele². V částech (3) a (5) jsou Floquetovy multiplikátory jednoduché, a proto jim odpovídající elementární dělitele jsou lineární. Z části (4) pak vyplývá, že dvojnásobnému Floquetovu multiplikátoru ležícímu na hraniční kružnici odpovídají lineární elementární dělitele právě tehdy, když jsou všechna řešení rovnice (L) periodická.

REFERENCE

- [1] G. Sansone: *Ordinary differential equations. Vol. I.*, Izdat. Inostrannoj Literatury, Moscow, 1953, rusky.
- [2] J. Šremr: *Floquetova teorie a stabilita lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty*. Pokroky Mat. Fyz. Astron. **68** (2023), No. 4, 246–274.
- [3] J. Šremr: *Floquetova teorie pro lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty I*. Kvaternion (2022), No. 1–2, 17–31. Dostupné z: http://kvaternion.fme.vutbr.cz/2022/kv22_1-2_sremr_web.pdf.
- [4] V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskij: *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*, Nauka, Moscow, 1972, rusky.

Jiří Šremr, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: sremr@fme.vutbr.cz

²Tento pojem jsme vysvětlili v [3] na str. 24.

ANALÝZA PROBLÉMU CYKlickÉHO PRONÁSLEDOVÁNÍ

VENDULA KUČEROVÁ

ABSTRAKT. Tento článek se zabývá analýzou problému cyklického pronásledování, který se objevuje v různých oblastech aplikované matematiky. Cílem je sestavit matematický model pohybu n bodů (jedinců), kde každý sleduje svého souseda podle předem stanovených pravidel. Pohyb těchto bodů je popsán soustavou diferenciálních rovnic, na jejímž základě je analyzována trajektorie pohybu a stanovena doba pronásledování. Teoretické výsledky jsou podpořeny grafickou vizualizací pro různé modifikace. Článek obsahově vychází z autorčiny bakalářské práce [4].

1. ÚVOD

V roce 1732 francouzský matematik Pierre Bouguer publikoval a následně i vyřešil problém, který je dnes považován za první v oblasti pronásledovacích úloh. V této klasické úloze míří pronásledovatel v každém okamžiku přímo na svůj cíl, čímž vytváří tzv. *pronásledovací křivku* (pursuit curve).

V roce 1877 Edouard Lucas koncept zobecnil na tzv. *cyklické pronásledování*. V jeho slavném zadání, známém jako „problém tří psů“, jsou psi umístěni do vrcholů rovnostranného trojúhelníka a každý z nich začne současně pronásledovat svého souseda stejnou konstantní rychlostí. Henri Brocard krátce nato ukázal, že výslednou trajektorii každého psa je logaritmická spirála. V literatuře se problém cyklického pronásledování často ilustruje na tzv. problému čtyř brouků, který se stal jedním z nejznámějších modelových příkladů této úlohy [6].

V tomto článku se postupně zaměříme na sestavení matematického modelu pro n bodů. Začneme již zmiňovaným případem čtyř brouků ve vrcholech čtverce, přejdeme k zobecnění pro pravidelné n -úhelníky a v závěru prodiskutujeme i chování systému v nesymetrických případech.

2. PROBLÉM ČTYŘ BROUKŮ

Nejnázornějším případem pro pochopení problému je situace, kdy čtyři brouci startují z vrcholů čtverce. Tento model nejlépe demonstroe základní dynamiku celého systému.

2020 MSC. Primární 9N75; Sekundární 91A24,34A05.

Klíčová slova. Cyklické pronásledování, problém n brouků, pronásledovací křivka, diferenciální rovnice, matematický model.

Článek vznikl na základě bakalářské práce autora v oboru Matematické inženýrství na FSI VUT v Brně. Vedoucí práce byl Jan Čermák z Ústavu matematiky FSI VUT v Brně.

2.1. Zadání

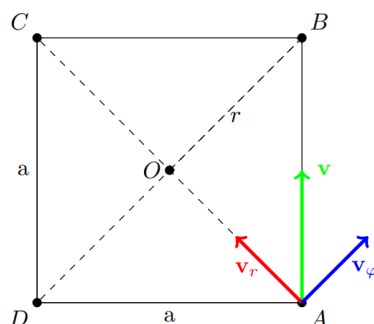
Brouci jsou na začátku umístěni do vrcholů čtverce. V čase $t = 0$ začne každý brouk pronásledovat svého souseda proti směru hodinových ručiček. Všichni se pohybují stejnou (konstantní) rychlostí a v každém okamžiku míří přímo na svého souseda [3].

Problém A: Jakou křivku opíše každý brouk?

Problém B: Jak dlouhá bude dráha, kterou každý brouk urazí, než se potkají? Za jak dlouho dojde k setkání?

2.2. Matematický model

Brouci A, B, C, D tvoří vrcholy čtverce o straně a . Počátek polární soustavy kládeme do středu čtverce O . V libovolném čase t se brouk A nachází ve vzdálenosti $r(t)$ od středu. Díky symetrii se všichni brouci pohybují po stejných trajektoriích, pouze vzájemně otočených o $\pi/2$.



Obrázek 1. Geometrie brouků ve čtverci.

Vektor rychlosti v brouka A směřuje v každém okamžiku do bodu B . Tento vektor rozložíme v polárních souřadnicích na složku radiální v_r a tangenciální v_φ .

Pro úplnost uvedme, jakým způsobem je vektor rychlosti rozložen v polárních souřadnicích. Poloha bodu je popsána v komplexní rovině ve tvaru

$$\mathbf{p}(t) = r(t) e^{i\varphi(t)},$$

odkud pro rychlostní vektor plyne

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \frac{dr}{dt} e^{i\varphi(t)} + i r(t) e^{i\varphi(t)} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Vektor $e^{i\varphi}$ představuje jednotkový radiální vektor ve směru průvodiče, zatímco $ie^{i\varphi}$ je jednotkový tečný vektor kolmý na radiální směr. Odtud dostaneme standardní

tvar radiální a tangenciální složky rychlosti

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Z geometrie čtverce plyne, že vektor rychlosti svírá s průvodičem konstantní úhel $\pi/4$ a na základě toho můžeme jednotlivé složky zapsat takto:

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -v \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = v \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

2.3. Řešení

2.3.1. Problém A: Určení trajektorie. Abychom získali přímo závislost $r(\varphi)$, využijeme řetězové pravidlo

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt},$$

do něhož dosadíme složky rychlosti (1) a (2). Odtud plyne

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r}.$$

Separací proměnných a využitím počáteční podmínky $r(0) = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ získáváme řešení

$$r(\varphi) = a\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\varphi}. \quad (3)$$

Každý brouk opisuje *logaritmickou spirálu*, která začíná ve vrcholu čtverce ($\varphi = 0$) a při rostoucím φ konverguje ke středu O , viz. obrázek 2.

2.3.2. Problém B: Délka dráhy a doba pronásledování. Délka oblouku v polárních souřadnicích je dána vztahem [5]

$$S = \int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi.$$

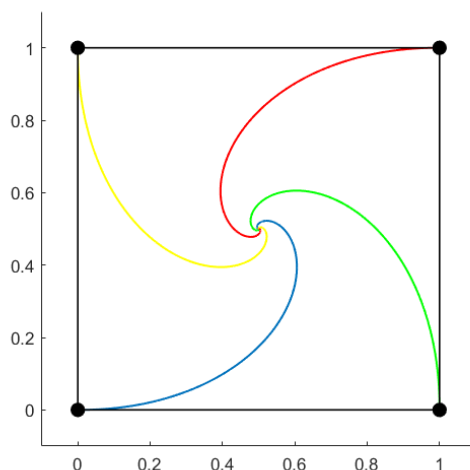
Poznamenejme, že meze integrálu jsou dány jako $\varphi \in [0, \infty)$. Pronásledovací křivky brouků jsou logaritmické spirály, které nemají v rovině konečný průsečík, ale při $\varphi \rightarrow \infty$ konvergují k počátku souřadného systému. K setkání brouků proto dochází až v limitním bodě $r \rightarrow 0$, což odpovídá právě limitě $\varphi \rightarrow \infty$. Horní mez integrálu je tedy rovna nekonečnu.

Po dosazení (3) do tohoto vztahu dostaneme

$$S = \int_0^\infty a e^{-\varphi} d\varphi.$$

Nevlastní integrál vyčíslíme jako limitu:

$$S = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_0^\tau a e^{-\varphi} d\varphi \right) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [-a e^{-\varphi}]_0^\tau.$$



Obrázek 2. Pronásledovací křivky pro $a = 1$.

Protože $e^{-\tau} \rightarrow 0$ pro $\tau \rightarrow \infty$, platí

$$S = a.$$

Každý brouk tedy urazí dráhu rovnou straně čtverce.

Zbývá stanovit čas, za který k pronásledování dojde. Vzhledem k tomu, že se brouci pohybují stejnou rychlostí v , lze jej vyjádřit jako podíl délky dráhy a rychlosti

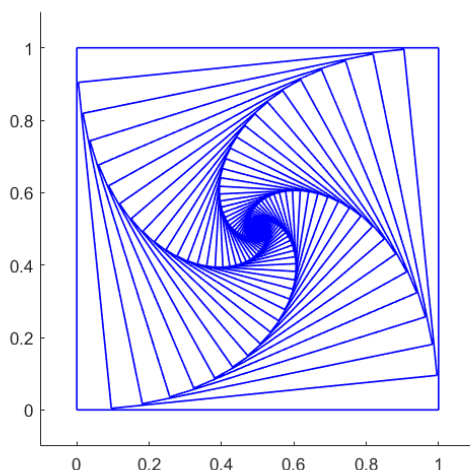
$$T = \frac{S}{v} = \frac{a}{v}.$$

2.4. Symetrie čtverce

V závěru předchozí kapitoly jsme ukázali, že v případě čtyř brouků ve vrcholech čtverce je celková uražená dráha rovna počáteční délce jeho strany, tedy $S = a$. Na tuto skutečnost lze nahlédnout i z jiné strany a to bez použití diferenciálních rovnic.

Díky symetrii zůstávají brouci po celou dobu pronásledování ve vrcholech smřtujícího se a současně rotujícího čtverce. Každý brouk se tedy pohybuje po tečně ke kružnici opsané tomuto čtverci a urazí dráhu odpovídající počáteční délce jeho strany.

Tuto myšlenku ilustruje obrázek 3, kde jsou v diskrétních časových okamžicích zobrazeny po sobě jdoucí konfigurace čtverce. Je však třeba zdůraznit, že tento argument je založen výhradně na symetrii čtverce. Úhel mezi sousedními trajektoriemi je zde v každém okamžiku roven $\pi/2$, a proto se strany čtverce zkracují stejnou rychlostí, jakou se brouci pohybují. V obecném případě tato vlastnost neplatí.



Obrázek 3. Smřšťující se čtverce při cyklickém pronásledování.

3. ZOBECNĚNÝ PROBLÉM n BROUKŮ V PRAVIDELNÉM n -ÚHELNÍKU

V následující části rozšíříme předchozí analýzu na obecný případ n brouků ve vrcholech pravidelného n -úhelníku.

3.1. Zadání

Uvažujme n brouků umístěných ve vrcholech pravidelného n -úhelníku. V čase $t = 0$ začne každý brouk pronásledovat svého souseda proti směru hodinových ručiček. Všichni brouci se pohybují stejnou rychlostí a v každém okamžiku směřují přímo na pronásledovaného brouka [6].

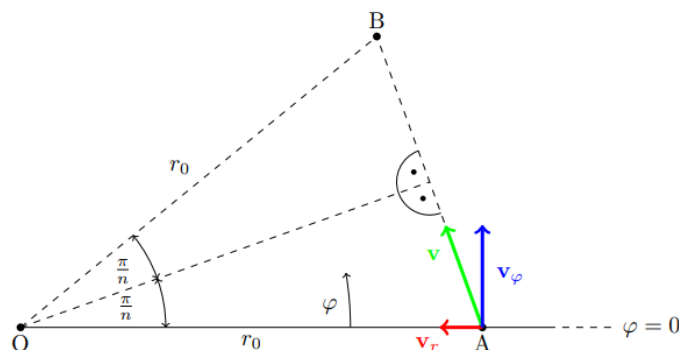
Problém C: Jakou křivku opíše každý brouk?

Problém D: Jaká je délka dráhy uražené každým broukem do okamžiku setkání a za jak dlouho k setkání dojde?

3.2. Matematický model

Obrázek 4 zobrazuje konfiguraci pro libovolné dva sousední brouky A a B umístěné v pravidelném n -úhelníku. Zvolíme polární souřadnicový systém s počátkem ve středu O a úhlem $\varphi = 0$ totožným s vodorovnou osou. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že brouk A se v čase $t = 0$ nachází na této ose.

Brouk A se pohybuje přímo směrem k brouku B rychlostí v . Vektor rychlosti v rozložíme v polárních souřadnicích na radiální a tangenciální složku. Z elementární geometrie vyplývá, že tyto složky mají tvar



Obrázek 4. Geometrie pronásledování v pravidelném n -úhelníku.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v \sin \frac{\pi}{n}, \quad (4)$$

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = v \cos \frac{\pi}{n}. \quad (5)$$

3.3. Řešení

3.3.1. Problém C: Tvar trajektorie. Dosazením složek (4) a (5) vektoru rychlosti do řetězového pravidla získáme diferenciální rovnici

$$\frac{dr}{r} = -\tan \frac{\pi}{n} d\varphi.$$

Jejím řešením separací proměnných s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$ dostaneme

$$r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi \tan \frac{\pi}{n}}, \quad (6)$$

což je rovnice logaritmické spirály. Všechny trajektorie jsou shodné až na rotaci o úhel $\frac{2\pi}{n}$. Pro $n = 4$ se výraz redukuje na případ čtverce.

3.3.2. Problém D: Délka dráhy a doba do setkání. Pro výpočet dráhy, kterou brouci urazí, využijeme stejného postupu jako v předešlém případě. Platí tedy

$$S = \int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi$$

Po dosazení získané trajektorie (6) a vyčíslením integrálu obdržíme

$$S = \frac{r_0}{\sin \frac{\pi}{n}}. \quad (7)$$

Doba do setkání plyne přímo ze vztahu mezi dráhou a rychlostí,

$$T = \frac{S}{v} = \frac{r_0}{v \sin \frac{\pi}{n}}.$$

3.4. Dráhy pro některá n

Z geometrie pravidelného n -úhelníku plyne, že počáteční vzdálenost mezi dvěma sousedními brouky je

$$a(0) = 2r_0 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Odtud vyjádříme r_0 :

$$r_0 = \frac{a(0)}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Dosazením tohoto vztahu do vzorce (7) pro dráhu dostáváme výsledný výraz

$$S = \frac{a(0)}{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

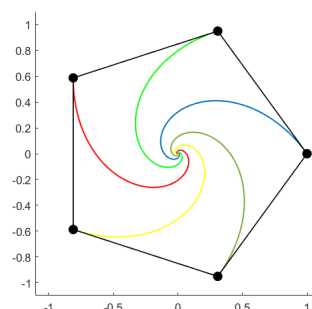
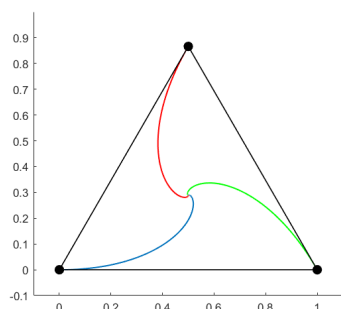
Tento vztah umožňuje přímo porovnat délku dráhy uraženou brouky pro různé hodnoty n v jednotkách počáteční vzdálenosti $a(0)$.

Tabulka 1. Délka dráhy S pro vybraná n (v jednotkách $a(0)$).

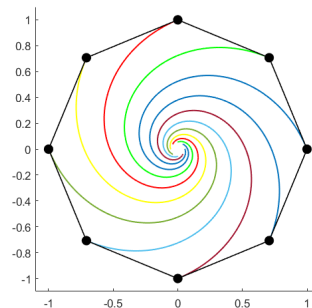
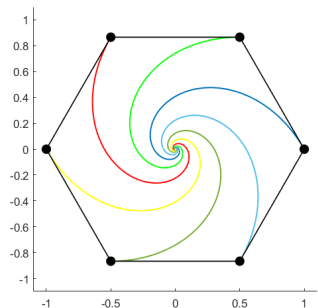
n	$S [a(0)]$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{3}$
4	1
5	1,44721
6	2
7	2,65597
8	3,41421
9	4,27432
10	5,23607
100	506,77262
1000	50660,75849

Z tabulky je patrné, že s rostoucím n roste i délka dráhy. V limitě $n \rightarrow \infty$ se n -úhelníky blíží příslušným kružnicím a brouci se nikdy nepotkají, což odpovídá intuitivnímu chování cyklického pronásledování na kruhu.

3.5. Grafické vizualizace



Obrázek 5. Pronásledovací křivka pro $n = 3$. **Obrázek 6.** Pronásledovací křivka pro $n = 5$.



Obrázek 7. Pronásledovací křivka pro $n = 6$. **Obrázek 8.** Pronásledovací křivka pro $n = 8$.

4. MORLEYHO NESYMETRICKÝ PROBLÉM TŘÍ BROUKŮ

Tento problém redukuje konfiguraci na tři brouky, ale bez počáteční symetrie — výchozí trojúhelník je obecný, nikoli pravidelný. Klíčovou otázkou je možnost ne-současného setkání. Ukážeme, že brouci se musí setkat **současně** a že k setkání dojde v **konečném čase** (postup i důkazy vycházejí z [3, 6]).

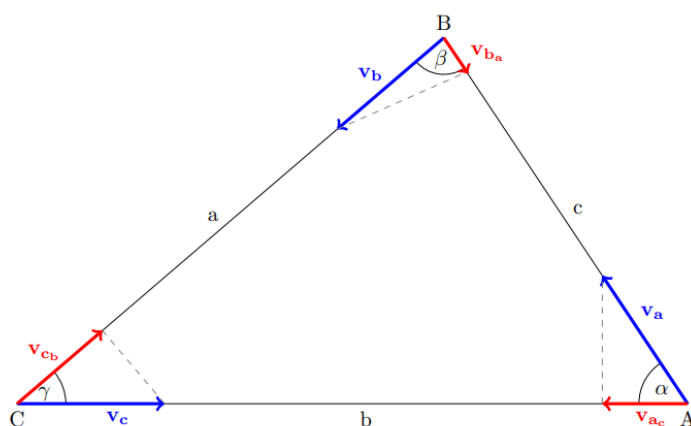
4.1. Zadání

Mějme nepravidelný trojúhelník s vrcholy A, B a C . Do těchto vrcholů umístíme brouky, které označíme souhlasně s vrcholy písmeny A, B a C . Strany trojúhelníku označíme podle jejich protějšího vrcholu. Úhly u vrcholů označíme α, β, γ . Brouci se pohybují stejnou konstantní rychlostí v a každý brouk pronásleduje přímo svého souseda proti směru hodinových ručiček.

Problém E: Dokažte, že se všichni brouci setkají zároveň.

Problém F: Ukažte, že k setkání dojde za konečný čas.

4.2. Matematický model



Obrázek 9. Rychlosti brouků v nepravidelném trojúhelníku.

Zavedeme pojem **uzavírací rychlosti** – jde o rychlost, s níž se zkracuje délka strany vlivem vzájemného pronásledování. V případě čtverce byla uzavírací rychlost rovna rychlosti brouka, protože úhly mezi vektory rychlostí a spojnicemi sousedů byly vždy $\pi/2$.

V obecném (nesymetrickém) trojúhelníku je situace odlišná, protože vektor rychlosti pronásledovaného brouka není kolmý na spojnici s pronásledovatelem. Uvažujme stranu a , která spojuje brouky B a C . Brouk B se pohybuje přímo směrem k brouku C s rychlostí v_b , která přímo zkracuje stranu a . Brouk C směřuje k brouku A a jeho rychlost v_c má vůči straně a pouze složku v_{cb} , tj. projekci do směru strany a . Celková uzavírací rychlost strany a je součtem těchto dvou příspěvků:

$$v_{uz,a} = |v_b| + |v_{cb}|.$$

Protože se délka strany zmenšuje, derivace strany a podle času je rovna záporně vzaté uzavírací rychlosti. Předpokládáme-li pro zjednodušení jednotkovou rychlost pohybu ($v = 1$), získáváme analogickým postupem pro všechny strany následující soustavu diferenciálních rovnic:

$$\frac{da}{dt} = -(1 + \cos \gamma), \quad (8)$$

$$\frac{db}{dt} = -(1 + \cos \alpha), \quad (9)$$

$$\frac{dc}{dt} = -(1 + \cos \beta), \quad (10)$$

kde si uvědomujeme, že kromě velikostí stran a, b, c se časem mění také velikosti úhlů α, β, γ , které jsou funkcemi času.

4.3. Dynamika vnitřních úhlů

Abychom pochopili, jak se trojúhelník během pronásledování mění, musíme odvodit časovou závislost vnitřních úhlů. Východiskem je kosinová věta pro úhel α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

kterou zderivujeme podle času:

$$a \frac{da}{dt} = b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} - (b \frac{dc}{dt} + c \frac{db}{dt}) \cos \alpha + bc \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \quad (11)$$

Do tohoto vztahu dosadíme dříve odvozené rovnice pro změny délek stran (8), (9), (10). Pro následné zjednodušení výrazu využijeme specifickou trigonometrickou identitu

$$b(1 - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = c(\cos \alpha - \cos \beta) + a(1 + \cos \gamma).$$

Dosazením této identity do zderivované kosinové věty (11) dojde k eliminaci většiny členů, čímž se vztah redukuje na diferenciální rovnici pro derivaci úhlu α :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin \alpha}{b} - \frac{\sin \beta}{c}.$$

V zadání jsme si označení stran a úhlů zvolili libovolně, což umožňuje cyklickou transformaci. Soustavu pro změnu úhlu α lze tedy analogicky přepsat i pro úhly β a γ přejmenováním proměnných

$$\alpha \rightarrow \gamma, \quad a \rightarrow c \quad \gamma \rightarrow \beta, \quad c \rightarrow b \quad \beta \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow a.$$

Následující soustava popisuje časovou změnu všech úhlů trojúhelníku v závislosti na aktuálních délkách stran.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sin \alpha}{b} - \frac{\sin \beta}{c}, \quad (12)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\sin \beta}{c} - \frac{\sin \gamma}{a}, \quad (13)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\sin \gamma}{a} - \frac{\sin \alpha}{b}.$$

V další části textu se zaměříme na Problém E a Problém F. Nejprve ukážeme, že brouci se v nesymetrickém trojúhelníku musí setkat současně, tj. že existuje čas t_c , při kterém všechny strany trojúhelníku konvergují k nule:

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^-} b(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^-} c(t) = 0.$$

Později v rámci Problému F prokážeme, že tento čas t_c je konečný.

4.4. Řešení Problému E – důkaz současného setkání

Ukážeme sporem, že v obecném trojúhelníku nemůže dojít k postupnému setkání brouků, nýbrž že všichni tři se musí setkat současně. Po celou dobu pohybu brouci tvoří trojúhelník, a proto pro všechna $t < t_c$ platí

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) = \pi, \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi. \quad (14)$$

Předpokládejme, že jako první se setkají brouci A a B , zatímco brouk C je dostihne až později, tj.

$$c \rightarrow 0 \wedge a, b \not\rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow t_c^-,$$

kde t_c je čas, kdy A dostihne B .

Protože funkce $a(t), b(t), c(t)$ jsou monotónně klesající a nezáporné, existují jejich konečné limity:

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} c(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_c^-} a(t) = a_0 > 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_c^-} b(t) = b_0 > 0.$$

V důsledku toho přímo vyplývá, že pro t dostatečně blízká t_c^- platí nerovnost

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{c} < 0.$$

Podle sinové věty platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - \frac{b}{c} < 0,$$

po úpravě

$$\frac{\sin \alpha}{b} < \frac{\sin \beta}{c}.$$

Odtud a ze vztahu (12) plyne $\frac{d\alpha}{dt} < 0$, tedy existuje α_0 tak, že

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} \alpha = \alpha_0 < \pi.$$

Zaměříme se nyní na chování úhlu β . Pro všechna $t \in (0, t_c)$ platí $a(t) > a_0$ a zároveň $\gamma(t) \in (0, \pi)$. Ze vztahu (13) proto dostáváme odhad

$$\frac{d\beta}{dt} > \frac{\sin \beta}{c} - \frac{1}{a_0}. \quad (15)$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{\sin \beta}{c} > 0$, lze tento odhad upravit

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{a_0} > 0.$$

Toto můžeme přepsat jako:

$$\frac{d}{dt} \left(\beta + \frac{t}{a_0} \right) > 0.$$

Z toho plyne, že výraz v závorce je rostoucí a je shora omezen, existence limity $\beta(t) \rightarrow \beta_0$ je tedy zajištěna.

Nyní zintegrováním nerovnosti (15) na intervalu $(0, t_c^-)$ dostáváme

$$\int_0^{t_c^-} d\beta > \int_0^{t_c^-} \frac{\sin \beta}{c} dt - \int_0^{t_c^-} \frac{1}{a_0} dt.$$

Po vyhodnocení integrálů a využití limitního chování $\beta(t) \rightarrow \beta_0$ při $t \rightarrow t_c^-$ získáme nerovnost

$$\beta_0 - \beta(0) + \frac{t_c^-}{a_0} > \int_0^{t_c^-} \frac{\sin \beta}{c} dt. \quad (16)$$

Integrand na pravé straně je na celém integračním intervalu kladný, neboť $\beta \in (0, \pi)$ a $c(t) > 0$. Levá strana tedy představuje konečnou horní mez, z čehož plyne existence daného integrálu.

Pomocí vztahu (10) provedeme substituci

$$dt = -\frac{dc}{1 + \cos \beta},$$

která je přípustná díky monotónnímu poklesu funkce $c(t)$. Po úpravě mezí dostává pravá strana (16) tvar

$$\int_0^{c(0)} \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \frac{dc}{c}.$$

S využitím identity

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \tan \frac{\varphi}{2}$$

se integrál přepíše jako

$$\int_0^{c(0)} \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{c} dc.$$

Existence tohoto integrálu vyžaduje, aby při $c \rightarrow 0$ platilo $\tan \frac{\beta}{2} \rightarrow 0$, jinak by integrál divergoval. Tedy

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} \beta(t) = \beta_0 = 0.$$

Protože strana $c(t)$ se v jeden okamžik stane nejkratší stranou, sinová věta implikuje, že i protější úhel $\gamma(t)$ je nejmenší a současně $\gamma(t) \rightarrow 0$.

Shrneme-li limitní chování úhlů, dostáváme

$$\alpha(t) \rightarrow \alpha_0 < \pi, \quad \beta(t) \rightarrow 0, \quad \gamma(t) \rightarrow 0.$$

Odtud ale plyne

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} (\alpha + \beta + \gamma) < \pi,$$

což je v rozporu s podmínkou $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (14). Tento spor ukazuje, že předpoklad postupného setkání je chybný a všichni tři brouci se musí setkat **současně**.

4.5. Řešení Problému F – konečný čas setkání

V předchozí části jsme ukázali, že pokud k dostižení dojde, pak nutně proběhne současně. Zbývá tedy dokázat, že čas dostižení t_c je konečný.

Sečtením rovnic (8)–(10) dostáváme

$$\frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} = -3 - (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma). \quad (17)$$

Protože po celou dobu pohybu platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi),$$

lze výraz na pravé straně rovnice (17) shora i zdola omezit.

Uvažujeme funkci

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů lze ověřit, že extrémní hodnoty této funkce za vazební podmínky $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ nastávají buď v bodě

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3},$$

nebo na hranici přípustné oblasti v degenerovaném limitním případě, kdy dva úhly konvergují k nule a třetí k π . Těmito konfiguracím odpovídají hodnoty

$$f_{\max} = \frac{3}{2}, \quad f_{\min} = 1.$$

Odtud plyne odhad

$$1 \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Dosazením do (17) získáme nerovnost

$$-\frac{9}{2} \leq \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} \leq -4,$$

která platí po celý čas pohybu. Z toho vyplývá, že součet délek stran

$$S(t) = a(t) + b(t) + c(t)$$

je klesající funkce, omezená zdola nulou. Integrací této nerovnosti na intervalu $[0, t] \subset [0, t_c]$ dostáváme

$$-\frac{9}{2}t \leq S(t) - S(0) \leq -4t.$$

Protože $S(t) \geq 0$, existuje čas $t_c > 0$, pro který

$$S(t_c) = a(t_c) + b(t_c) + c(t_c) = 0.$$

Vzhledem k nezápornosti jednotlivých délek stran a zaručené současnosti dostižení je současně

$$a(t_c) = b(t_c) = c(t_c) = 0.$$

Dosazením $t = t_c$ do předchozí nerovnosti získáme odhad doby dostižení:

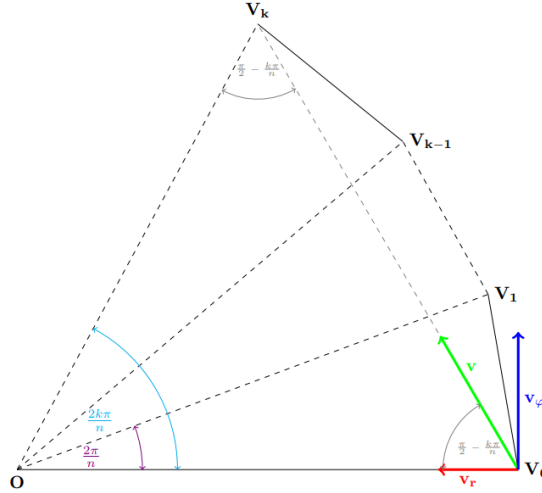
$$-\frac{9}{2} t_c \leq -S(0) \leq -4 t_c \quad \implies \quad \frac{S(0)}{9/2} \leq t_c \leq \frac{S(0)}{4},$$

kde $S(0) = a(0) + b(0) + c(0)$. Odtud přímo plyne, že t_c je konečný.

5. DALŠÍ MODIFIKACE ÚLOH

Cyklické pronásledování umožňuje řadu zobecnění. Častou variantou je, že každý brouk v pravidelném n -úhelníku nepronásleduje nejbližšího souseda, ale brouka vzdáleného o k vrcholů [7]. Pro $k = 1$ jde o klasický, symetrický případ.

Uvažujme pravidelný n -úhelník opsaný jednotkovou kružnicí ($r(0) = 1$) a polární souřadnicový systém se středem v O . Brouk z vrcholu V_0 pronásleduje brouka ve vrcholu V_k .



Obrázek 10. Pronásledování k -tého souseda.

Podle geometrie n -úhelníku vyjádříme jednotlivé složky vektoru rychlosti

$$v_r = -v \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n} \right),$$

$$v_\varphi = v \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n} \right).$$

Pomocí goniometrických identit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

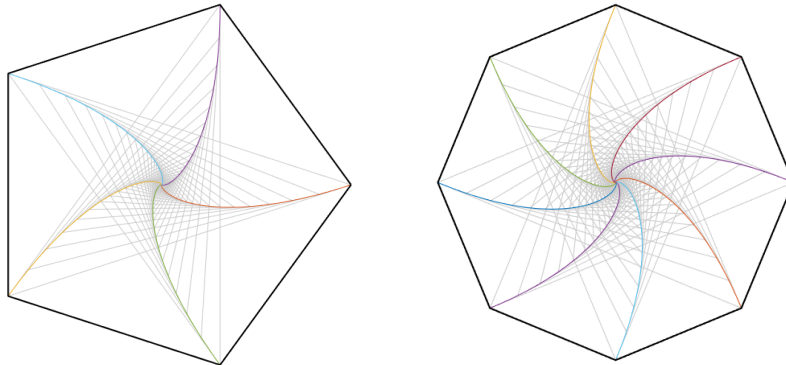
můžeme složky přepsat přímo v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v \sin \frac{k\pi}{n}, \\ r \frac{d\varphi}{dt} &= v \cos \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Tyto složky dosadíme do řetězového pravidla a vzniklou diferenciální rovnici vyřešíme metodou separace proměnných s počáteční podmínkou $r(0) = 1$. Výsledkem je

$$r(\varphi) = e^{-\varphi \tan \frac{k\pi}{n}}.$$

Vidíme, že trajektorie brouka tvoří logaritmickou spirálu směřující ke středu n -úhelníku O .



Obrázek 11. Pronásledovací křivky pro $k = 2$, $n = 5$ vlevo a $k = 3$, $n = 8$ vpravo.

Poznámka. Pokud by brouk měl pronásledovat brouka vzdáleného více než polovinu obvodu n -úhelníku ($k > \frac{n}{2}$), je vhodnější zvolit opačný směr pohybu $-\varphi$, aby trajektorie směřovala přímo ke sledovanému cíli.

6. DALŠÍ MODIFIKACE ÚLOH

Dalším zobecněním je pronásledování na zakřivených plochách, například na sféře nebo hyperbolické rovině. Geometrie těchto ploch způsobuje odlišné průběhy trajektorií, přičemž v limitním případě sféra obsahuje Euklidovskou rovinu [1].

Problém cyklického unikání představuje opačný scénář, kdy každý brouk míří od druhého. Numerická pozorování naznačují konvergenci k pravidelnému polygonu nebo lineární konfiguraci. V případě tří brouků limitní konfigurace tvoří rovnostranný trojúhelník, což bylo formálně dokázáno v [2].

Tato zobecnění ukazují, že klasický problém cyklického pronásledování lze rozšířit do širší geometrické a dynamické oblasti, otevírající cestu k novým analýzám a modelům.

7. ZÁVĚR

V tomto článku jsme analyzovali problémy spojené s cyklickým pronásledováním a vytvořili modely pro různé varianty této úlohy, inspirované klasickým problémem Edouarda Lucase.

Nejdříve jsme řešili problém čtyř brouků v čtvercové formaci. Tento příklad umožnil seznámit čtenáře s principy cyklického pronásledování, prací s polárními souřadnicemi a výpočtem pronásledovací křivky, délky dráhy a času setkání.

Dále jsme zobecnili úlohu na n brouků umístěných v pravidelném n -úhelníku. Odvodili jsme pronásledovací křivky, délky drah a dobu setkání, čímž jsme získali i řešení původního trojúhelníkového problému.

Pro nesymetrický trojúhelník jsme sporem prokázali, že nesoučasné setkání brouků není možné, a odhadli jsme dobu současného setkání.

Na závěr jsme nastínili další modifikace, například pronásledování k -tého souseda, a odkázali na literaturu pro složitější případy, včetně pronásledování na sféře či hyperbolické rovině a opačného problému cyklického unikání.

Cyklické pronásledování je populární v zahraničních publikacích, ale v české a slovenské literatuře zatím má omezené zastoupení. Tento článek tak poskytuje výchozí rámec pro další rozvoj složitějších modelů a jejich analýzu.

REFERENCE

- [1] P. K. Aravind: *A symmetrical pursuit problem on the sphere and the hyperbolic plane*, The Mathematical Gazette **78** (1994), 30–36, DOI:10.2307/3619428.
- [2] M. Arnold, V. Zharnitsky: *Cyclic evasion in the Three Bug Problem*, The American Mathematical Monthly **122** (2015), 377–384.
- [3] M. S. Klamkin, D. J. Newman: *Cyclic pursuit or the “Three Bugs Problem”*, The American Mathematical Monthly **78** (1971), 631–639.
- [4] V. Kučerová: *Analýza problému cyklického pronásledování* [online], Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2024, Bakalářská práce, dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157621>.
- [5] U. Mukhopadhyay: *Logarithmic spiral – a splendid curve*. Resonance **9** (2004), 39–45.
- [6] P. J. Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, Princeton: Princeton University Press, 2012.
- [7] M. J. Seery: *Pursuit and regular n -gons*, The College Mathematics Journal **29** (1998), 228–229.

Vendula Kučerová, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: 238624@vutbr.cz

KONEČNÉ DIFERENCE A KVALITATIVNÍ ANALÝZA POSLOUPNOSTÍ

JAN PROKOP

ABSTRAKT. Článek se věnuje studiu konečných diferencí jakožto diskretní analogii spojitého diferenciálního počtu. Na základě vlastností diferenčního operátoru jsou odvozeny diskretní verze vět o střední hodnotě a dále je vybudována teorie lokálních a globálních extrémů posloupností. Zvláštní pozornost je věnována tzv. rozšířeným extrémům a jejich charakterizaci pomocí vyšších diferencí. Dále jsou odvozeny podmínky konvexnosti a konkávnosti posloupností v závislosti na chování jejich diferencí. Uvedené výsledky poskytují kompaktní aparát pro kvalitativní analýzu posloupností. Na závěr prezentujeme aplikaci odvozených výsledků na teoretických a aplikačních příkladech.

1. ÚVOD

Diferenciální počet představuje základní nástroj pro kvalitativní analýzu funkcí. V řadě problémů, ať už praktických nebo teoretických, však přirozeně vznikají diskretní struktury, buď ve formě posloupností, řešení diferenčních rovnic, nebo numerických aproximací spojitých problémů. Pro tyto situace je žádoucí vybudovat teorii, která by v diskretním prostředí plnila obdobnou roli jako klasický diferenciální počet. Jednoduchým příkladem může být *modus* (nejpravděpodobnější hodnota) diskretního rozdělení pravděpodobnosti. V literatuře jsou tyto výsledky většinou vysloveny bez detailnějšího komentáře, naším cílem v tomto článku je poskytnout čtenáři strukturovaný aparát, pomocí kterého je možné kvalitativně studovat posloupnosti. Pro zájemce o problematiku lze doporučit práce [1, 2, 3].

Přestože je pojem konečné difference dobře známý, systematická teorie kvalitativních vlastností posloupností, zejména teorie lokálních a globálních extrémů, není v literatuře obvykle prezentována v jednotném nebo úplném tvaru. Zvláště případ tzv. rozšířených extrémů, kdy extrém nastává ve více po sobě jdoucích indexech.

Článek je koncipován následovně. V kapitole 2 jsou zavedeny základní pojmy konečných diferencí a jejich vlastností. Kapitola 3 je věnována diskretním analogiím vět o střední hodnotě. V kapitole 4 je vybudována teorie lokálních extrémů

2020 MSC. Primární 39-01; Sekundární 39-00.

Klíčová slova. Konečné difference, diferenční počet, posloupnosti, lokální extrémy, globální extrémy, konvexní posloupnosti, konkávní posloupnosti, asymptoty, modus.

posloupností, včetně tzv. rozšířených lokálních extrémů a jejich charakterizace pomocí vyšších diferencí. Dále jsou zde odvozeny podmínky konvexnosti a konkávnosti posloupností spolu s teorií asymptot. Na závěr kapitoly 4 prezentujeme aplikace odvozených výsledků na jednom teoretickém a dvou aplikačních příkladech.

2. ZÁKLADNÍ POJMY A DEFINICE

Úvodním pojmem diferenčního počtu je analogie derivace z diferenciálního počtu, kterou nazýváme difference. Ještě než formálně zavedeme pojem difference posloupnosti, představíme základní značení.

Diskrétní interval na množině celých čísel budeme značit $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ a platí

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{a, a+1, \dots, b-1, b\},$$

kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, přičemž lze připustit $a = -\infty$, $b = +\infty$. Analogicky zavádíme i otevřený diskrétní interval

$$(a, b)_{\mathbb{Z}} = \{a+1, \dots, b-1\}.$$

Posloupností y_k definovanou na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ máme na mysli zobrazení $y : [a, b]_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Posloupnost y_k nazveme na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ *rostoucí*, resp. *klesající*, jestliže pro všechna $i, j \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ takové, že $i < j$ platí $y_i \leq y_j$, resp. $y_i \geq y_j$. Za předpokladu, že jsou tyto nerovnosti ostré, mluvíme o *ryze rostoucí*, resp. *ryze klesající* posloupnosti. Posloupnost nazýváme *monotónní* jestliže je rostoucí nebo klesající a *ryze monotónní* jestliže je ryze rostoucí nebo ryze klesající.

Definice 2.1 (Difference posloupnosti). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+h]_{\mathbb{Z}}$, kde $h \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ nazýváme posloupnost Δy_k *diferencí posloupnosti y_k na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$* a platí

$$\Delta_h y_k := y_{k+h} - y_k.$$

Diferenci v bodě $k_0 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ definujeme jako

$$\Delta_h y_{k_0} := y_{k_0+h} - y_{k_0}.$$

Parametr h nazýváme *krokem difference*.

V celém článku se omezíme na speciální případ $h = 1$ a budeme používat značení

$$\Delta y_k := \Delta_1 y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Definice 2.2 (Difference n -tého řádu). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ nazýváme posloupnost $\Delta^n y_k$ *diferencí posloupnosti y_k n -tého řádu* definovanou na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ a platí

$$\Delta^n y_k := \Delta(\Delta^{n-1} y_k).$$

Diferenci n -tého řádu v bodě $k_0 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ definujeme jako

$$\Delta^n y_{k_0} := \Delta(\Delta^{n-1} y_{k_0}).$$

Diferenční operátor vykazuje řadu vlastností analogických vlastnostem derivace funkce. Jejich přehled uvádí následující věta.

Věta 2.3 (Základní vlastnosti diferencí). *Nechť y_k a z_k jsou posloupnosti definované na vhodných intervalech, $m, n \in \mathbb{N}$ a $C \in \mathbb{R}$. Pak platí*

- (i) $\Delta^m(\Delta^n y_k) = \Delta^{m+n} y_k,$
- (ii) $\Delta(y_k \pm z_k) = \Delta y_k \pm \Delta z_k,$
- (iii) $\Delta(C y_k) = C \Delta y_k,$
- (iv) $\Delta(y_k z_k) = y_k \Delta z_k + z_{k+1} \Delta y_k,$
- (v) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right) = \frac{z_k \Delta y_k - y_k \Delta z_k}{z_k z_{k+1}}.$

Důkaz. Dokážeme pouze rovnosti (i) a (ii), ostatní rovnosti lze ukázat analogicky.

(i) Z definice 2.2 můžeme psát

$$\begin{aligned} \Delta^m(\Delta^n y_k) &= \Delta^m(\underbrace{\Delta(\Delta \dots (\Delta y_k))}_{n\text{-krát}}) = \Delta^{m+1}(\underbrace{\Delta(\Delta \dots (\Delta y_k))}_{(n-1)\text{-krát}}) \\ &= \Delta^{m+2}(\underbrace{\Delta(\Delta \dots (\Delta y_k))}_{(n-2)\text{-krát}}) = \dots = \Delta^{m+n} y_k. \end{aligned}$$

(ii) Rovnost dokážeme přímým výpočtem.

$$\begin{aligned} \Delta(y_k \pm z_k) &= (y_{k+1} \pm z_{k+1}) - (y_k \pm z_k) = y_{k+1} \pm z_{k+1} - y_k \mp z_k \\ &= (y_{k+1} - y_k) \pm (z_{k+1} - z_k) = \Delta y_k \pm \Delta z_k. \end{aligned}$$

□

3. DISKRÉTNÍ VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

V této kapitole se budeme zabývat diskrétními analogiemi vět o střední hodnotě, které hrají v diferenciálním počtu klíčovou úlohu. Zejména při důkazech tvrzení, které dávají do souvislosti kvalitativní vlastnosti funkcí a jejich derivace.

Ještě než vyslovíme věty o střední hodnotě, potřebujeme zavést analogii nulového bodu pro posloupnosti. V diferenciálním počtu nazýváme bod $a \in D_f$ *nulovým bodem* funkce f , jestliže

$$f(a) = 0.$$

Existenci takového zaručuje Bolzanova věta, která předpokládá, že je daná funkce spojitá a mění znaménko na nějakém podintervalu definičního oboru. V diskrétním počtu pracujeme s posloupnostmi, které spojitě nejsou. Zavádíme proto tzv. zobecněný nulový bod.

Definice 3.1 (Zobecněný nulový bod). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak říkáme, že má *zobecněný nulový bod* v bodě $k \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, jestliže platí právě jedna z následujících podmínek:*

1. $y_k = 0$ pro $k = a$;
2. $y_{k-1} \neq 0$ $\wedge$ $y_{k-1} y_k \leq 0$ pro $k \in [a+1, b+1]_{\mathbb{Z}}$.

Nyní můžeme vyslovit a dokázat věty střední hodnotě.

Věta 3.2 (Diskrétní Rolleova věta o střední hodnotě). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ taková, že platí $y_a = y_{b+1}$. Pak má posloupnost prvních diferencí Δy_k , definovaná na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$, alespoň jeden zobecněný nulový bod.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že posloupnost Δy_k nemá zobecněný nulový bod na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$. Pak pro všechna $k \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ platí

$$\Delta y_a \neq 0, \quad (3.1)$$

a

$$(\Delta y_{k-1} = 0) \vee (\Delta y_{k-1} \Delta y_k > 0). \quad (3.2)$$

Z podmínky (3.1) dostáváme, že první podmínka v (3.2) nastat nemůže. Zvolme za $k = a+1$, pak platí buď $\Delta y_a = 0$ nebo $\Delta y_a \Delta y_{a+1} > 0$. První možnost je v rozporu s (3.1) a tedy musí nutně platit

$$\Delta y_a \Delta y_{a+1} > 0.$$

Analogicky volbou $k = a+2$ a využití nerovnosti $\Delta y_a \Delta y_{a+1} > 0$ obdržíme, že musí nutně platit

$$\Delta y_{a+1} \Delta y_{a+2} > 0.$$

Indukcí tedy dostaneme, že podmínky (3.1) a (3.2) se redukují na

$$\Delta y_a \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{k-1} \Delta y_k > 0,$$

pro všechna $k \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$. Odtud vidíme, že posloupnost Δy_k nemění na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ znaménko a zároveň nenabývá nulové hodnoty. To je spor, protože z podmínky, že Δy_k nemění znaménko, dostaneme, že původní posloupnost musí být ryze monotónní, což odporuje předpokladu $y_a = y_{b+1}$. $\square$

Vidíme, že se jedná o přímou analogii Rolleovy věty o střední hodnotě z diferenciálního počtu, kde za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na $[a, b]$, její diferencovatelnosti na (a, b) a vlastnosti, že $f(a) = f(b)$ platí, že existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Přímým zobecněním diskrétní Rolleovy věty o střední hodnotě je diskrétní Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Věta 3.3 (Diskrétní Lagrangeova věta o střední hodnotě). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak existuje index $j \in (a, b]_{\mathbb{Z}}$ takový, že platí buď*

$$\Delta y_j \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_{j-1},$$

nebo

$$\Delta y_{j-1} \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_j.$$

Důkaz. Definujme posloupnost u_k jako

$$u_k := y_k - k \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a}, \quad k \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}.$$

Pak platí

$$u_a = y_a - a \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} = \frac{(b+1)y_a - ay_{b+1}}{b+1-a},$$

$$u_{b+1} = y_{b+1} - (b+1) \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} = \frac{(b+1)y_a - ay_{b+1}}{b+1-a}.$$

Platí tedy $u_a = u_{b+1}$ a z věty 3.2 máme zaručenou existenci zobecněného nulového bodu posloupnosti Δu_k na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$. Tj. existuje nějaké $j \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ takové, že

$$\Delta u_{j-1} \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta u_{j-1} \Delta u_j \leq 0.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\Delta u_k = \Delta y_k - \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a},$$

můžeme psát

$$(\Delta y_{j-1} - \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a})(\Delta y_j - \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a}) \leq 0.$$

Odtud plyne, že

$$\min\{\Delta y_{j-1}, \Delta y_j\} \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \max\{\Delta y_{j-1}, \Delta y_j\}.$$

Tím pádem $\frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a}$ leží mezi hodnotami Δy_{j-1} a Δy_j a tedy

$$\Delta y_{j-1} \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_j \quad \text{nebo} \quad \Delta y_j \leq \frac{y_{b+1} - y_a}{b+1-a} \leq \Delta y_{j-1}.$$

□

Zde je podobnost s Lagrangeovou větou o střední hodnotě z diferenciálního počtu méně zřejmá. Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na $[a, b]$ a její diferencovatelnosti na (a, b) existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. VYŠETŘOVÁNÍ POSLOUPNOSTÍ

V této kapitole postupně vybudujeme teorii zabývající se kvalitativní analýzou posloupností. Ukážeme, jak lze využít konečné difference a jejich vlastnosti k vyšetřování posloupností.

4.1. Podmínky monotonie posloupnosti

Následující tvrzení nám dává do souvislosti nutné a postačující podmínky pro monotonii posloupností a posloupností prvních diferencí.

Věta 4.1 (Nutné a postačující podmínky pro monotonii posloupností). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí*

- (i) *Posloupnost y_k je rostoucí na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k \geq 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.*
- (ii) *Posloupnost y_k je ryze rostoucí na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k > 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.*
- (iii) *Posloupnost y_k je klesající na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k \leq 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.*

- (iv) Posloupnost y_k je ryze klesající na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta y_k < 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.
- (v) Posloupnost je konstantní na $[a, b+1]$ právě tehdy, když $\Delta y_k = 0$, pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$.

Důkaz. Ukážeme platnost vlastností (i) a (ii). Ostatní vlastnosti lze dokázat analogicky.

- (i) $(\Rightarrow)$: Jestliže je posloupnost y_k rostoucí, pak musí platit $y_{k+1} \geq y_k$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k \geq 0$, což je ekvivalentní s $\Delta y_k \geq 0$.
 $(\Leftarrow)$: Předpokládejme, že platí $\Delta y_k \geq 0$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k \geq 0$, což je ekvivalentní s $y_{k+1} \geq y_k$; to je definice rostoucí posloupnosti.
- (ii) $(\Rightarrow)$: Jestliže je posloupnost y_k ryze rostoucí, pak musí platit $y_{k+1} > y_k$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k > 0$, což je ekvivalentní s $\Delta y_k > 0$.
 $(\Leftarrow)$: Platí, že $\Delta y_k > 0$, odtud plyne, že $y_{k+1} - y_k > 0$ což je ekvivalentní s $y_{k+1} > y_k$; to je definice ryze rostoucí posloupnosti.

□

4.2. Lokální extrémy posloupnosti

V následující podkapitole zavedeme pojem (ostrého) lokálního extrému posloupnosti, vyslovíme a dokážeme nutné a postačující podmínky na první a druhou diferenci pro existenci ostrého lokálního extrému posloupnosti.

Záměrně jsme rozdělili kapitoly o extrémech do dvou podkapitol (ostré) lokální extrémy a rozšířené lokální extrémy. Ukazuje se, že u posloupností není teorie extrémů jednoznačná jako ve spojitém případě, takže jednak z důvodu logického budování teorie, ale i z důvodu aplikačního považujeme za vhodné teorii extrémů rozdělit.

Definice 4.2 (Lokální extrémy posloupnosti). Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak o posloupnosti y_k říkáme, že má v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$:

- (i) *Lokální minimum*, jestliže platí

$$y_{K_0-1} \geq y_{K_0} \leq y_{K_0+1}. \quad (4.1)$$

- (ii) *Lokální maximum*, jestliže platí

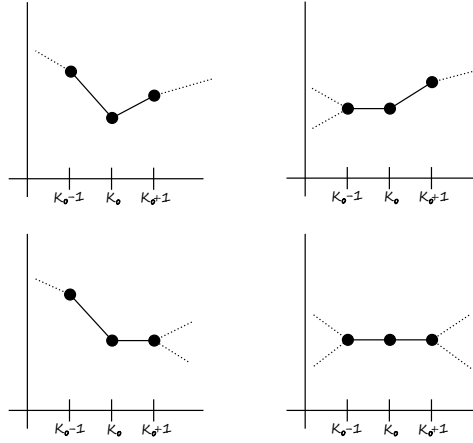
$$y_{K_0-1} \leq y_{K_0} \geq y_{K_0+1}. \quad (4.2)$$

V případě, že jsou nerovnosti v (4.1), resp. (4.2) ostré, pak mluvíme o *ostrém lokálním minimu*, resp. *ostrém lokálním maximu*.

Taková definice odpovídá naší intuitivní představě o (ostrém) lokálním minimu a (ostrém) lokálním maximu posloupnosti. Na obrázku 1 jsou postupně znázorněny všechny eventuality (ostrého) lokálního minima v bodě K_0 .

Na základě definice 4.2 můžeme vyslovit a dokázat nutnou a postačující podmínku na první diferenci pro existenci ostrého lokálního extrému posloupnosti.

Věta 4.3 (Nutné a postačující podmínky na první diferenci pro existenci ostrého lokálního extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí, že*



Obrázek 1. Znázornění ostrého lokálního minima v bodě K_0 (vlevo nahoře) a lokálního minima v bodě K_0 (ostatní obrázky).

- (i) posloupnost y_k má v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ ostré lokální minimum právě tehdy, když platí

$$\Delta y_{K_0} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} < 0,$$

- (ii) posloupnost y_k má v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ ostré lokální maximum právě tehdy, když platí

$$\Delta y_{K_0} < 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} > 0.$$

Důkaz. Dokážeme pouze bod (i), bod (ii) lze dokázat analogickým postupem.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že posloupnost y_k má v bodě K_0 ostré lokální minimum, tj.

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} < y_{K_0+1}.$$

Z první, resp. z druhé nerovnosti plyne

$$0 > \Delta y_{K_0-1}, \quad \text{resp.} \quad 0 < \Delta y_{K_0}.$$

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí $\Delta y_{K_0} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} < 0$. Z první, resp. druhé nerovnosti plyne

$$y_{K_0+1} - y_{K_0} > 0, \quad \text{resp.} \quad y_{K_0} - y_{K_0-1} < 0,$$

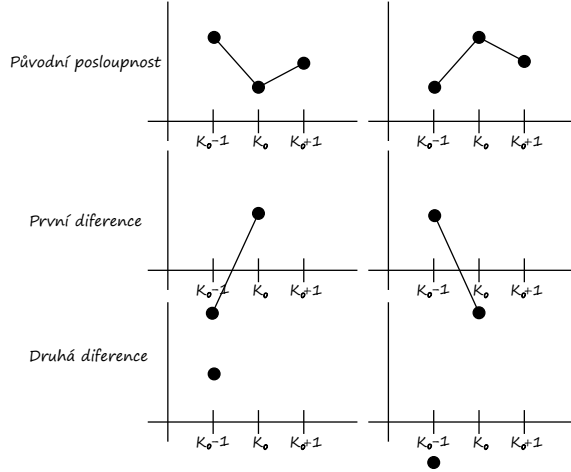
neboli

$$y_{K_0+1} > y_{K_0}, \quad \text{a} \quad y_{K_0} < y_{K_0-1},$$

což je definice ostrého lokálního minima. $\square$

Na obrázku 2 (nahore) jsou znázorněny posloupnosti, které mají v bodě K_0 ostré lokální minimum (vlevo), resp. ostré lokální maximum (vpravo), níže jsou znázorněny též první a druhé difference těchto posloupností.

Na základě obrázku 2 můžeme vyslovit a dokázat větu zahrnující druhou diferenci ve vztahu k ostrým lokálním extrémům.



Obrázek 2. Levý sloupec znázorňuje ostré lokální minimum v bodě K_0 a jeho první a druhou diferenci. Pravý sloupec znázorňuje ostré lokální maximum v bodě K_0 a jeho první a druhou diferenci.

Věta 4.4 (Nutné a postačující podmínky druhé diference pro existenci ostrého lokálního extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když je splněna jedna z následujících vzájemně ekvivalentních podmínek.*

- (i) *Posloupnost prvních diferencí Δy_k má zobecněný nulový bod na intervalu $(K_0 - 1, K_0)$, tj. platí, že $\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} < 0$ a navíc je na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí, resp. ryze klesající.*

(ii)

$$\Delta y_{K_0} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} < 0,$$

resp.

$$\Delta y_{K_0} < 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0-1} > 0.$$

(iii)

$$\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} = y_{K_0+1} y_{K_0} - y_{K_0+1} y_{K_0-1} - y_{K_0}^2 + y_{K_0} y_{K_0-1} < 0 \quad (4.3)$$

a zároveň

$$\Delta^2 y_{K_0-1} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^2 y_{K_0-1} < 0, \quad (4.4)$$

kde podmínky v (4.4) znamenají, že posloupnost Δy_k je na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí, resp. ryze klesající.

Důkaz. Z věty 4.3 plyne, že podmínka (ii) je ekvivalentní s existencí ostrého lokálního extrému posloupnosti y_k v bodě K_0 . Tím je dokázána platnost podmínky (ii).

(ii) $\iff$ (i): Podmínka (ii) nám říká, že posloupnost Δy_k má na intervalu $(K_0 - 1, K_0)$ zobecněný nulový bod, tj.

$$\Delta y_{K_0} \Delta y_{K_0-1} < 0.$$

Zároveň díky tomu, že pro ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum platí nerovnosti

$$\Delta y_{K_0} > \Delta y_{K_0-1}, \quad \text{resp.} \quad \Delta y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0},$$

platí také, že posloupnost prvních diferencí Δy_k je na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí, resp. ryze klesající, což je přímo tvrzení podmínky (i).

(i) $\iff$ (iii): Z podmínky (i) máme

$$\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} < 0.$$

Po rozepsání diferencí dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0} &< 0 \\ (y_{K_0} - y_{K_0-1})(y_{K_0+1} - y_{K_0}) &< 0 \\ y_{K_0} y_{K_0+1} - y_{K_0}^2 - y_{K_0-1} y_{K_0+1} + y_{K_0-1} y_{K_0} &< 0, \end{aligned}$$

což je přesně nerovnost (4.3). Navíc víme, že je posloupnost Δy_k na intervalu $[K_0 - 1, K_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze rostoucí (pro ostré lokální minimum) a ryze klesající (pro ostré lokální maximum). To znamená, že platí nerovnosti

$$\Delta y_{K_0} > \Delta y_{K_0-1} \quad \text{resp.} \quad \Delta y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0}.$$

Po převedení těchto nerovností na druhé difference dostaneme

$$\Delta y_{K_0} > \Delta y_{K_0-1} \iff \Delta^2 y_{K_0-1} > 0 \quad \text{resp.} \quad \Delta y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0} \iff \Delta^2 y_{K_0-1} < 0.$$

Což jsou přesně nerovnosti v (4.4). $\square$

Důsledkem právě dokázané věty je následující tvrzení, které dává podmínky pro první a druhé difference do přímé spojitosti.

Důsledek 4.5 (Nutná a postačující podmínka druhé difference pro existenci lokálního ostrého extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k v bodě $K_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum právě tehdy, když*

$$\Delta^2 y_{K_0-1} > \Delta y_{K_0} > 0,$$

resp.

$$\Delta^2 y_{K_0-1} < \Delta y_{K_0} < 0.$$

Nyní zavedeme pojem globálních extrémů posloupnosti, které budou představovat absolutně největší/nejmenší hodnotu posloupnosti na daném intervalu.

Definice 4.6 (Globální extrémy posloupnosti). Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ a nechť $K_0 \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak říkáme, že posloupnost y_k má na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ globální minimum, resp. globální maximum v bodě K_0 jestliže platí

$$y_{K_0} \leq y_j, \quad \text{resp.} \quad y_{K_0} \geq y_j \quad \forall j \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}.$$

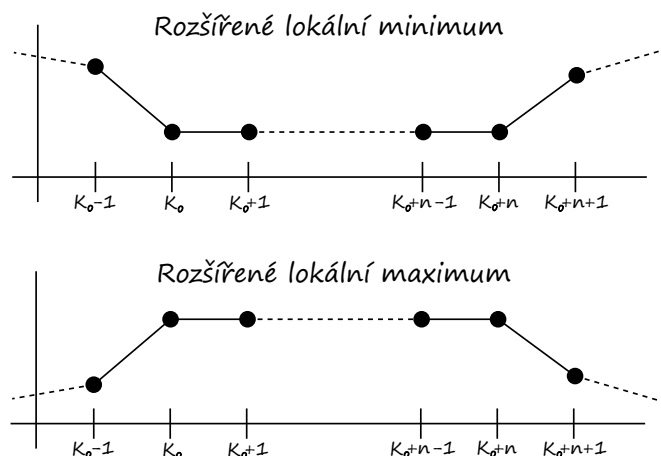
V následující poznámce uvedeme postup jak hledat globální extrémy.

Poznámka 4.7 (Nalezení globálních extrémů). Předpokládejme, že máme posloupnost y_k definovanou na nějakém intervalu $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Za pomoci výše uvedených vět nalezneme ostré lokální extrémy a jejich hodnoty. Následně tyto hodnoty porovnáme s hodnotami v bodech a a $b + 1$. Porovnáním všech těchto hodnot obdržíme globální extrémy. Jestliže uvažujeme posloupnost na $\mathbb{Z}$ a $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \pm\infty$ nebo $\lim_{k \rightarrow -\infty} y_k = \pm\infty$, pak taková posloupnost nemá globální maximum, resp. minimum a je neomezená, tj. pojem globálního extrému v takovém případě ztrácí smysl.

4.3. Rozšířené lokální extrémy

Při vyšetřování posloupností se můžeme setkat se situací, kdy má posloupnost v bodech K_0 a $K_0 + n$ lokální minimum, resp. lokální maximum a ve všech bodech na intervalu $[K_0 + 1, K_0 + n - 1]$ nabývá lokálního minima i lokálního maxima zároveň. Tyto situace jsou znázorněny na obrázku 3.

Z praktických důvodů je výhodné takovou posloupnost lokálních extrémů vnímat jakožto jeden „lokální“ extrém, takové extrémy budeme nazývat rozšířené lokální extrémy.



Obrázek 3. Znáznornění rozšířených extrémů, kde horní graf ilustruje rozšířené lokální minimum a dolní graf ilustruje rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$.

Definice 4.8 (Rozšířené lokální extrémy). Necht je y_k posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Řekněme, že tato posloupnost nabývá na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$ rozšířeného lokálního extrému jestliže, body $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$ jsou body lokálního extrému a platí

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1}, \quad (4.5)$$

nebo

$$y_{K_0-1} < y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} > y_{K_0+n+1}. \quad (4.6)$$

V případě splnění (4.5) mluvíme o *rozšířeném lokálním minimu*. A v případě splnění (4.6) mluvíme o *rozšířeném lokálním maximu*.

Rozšířené lokální extrémy jsou tak vlastně zobecněním ostrých lokálních extrémů z předchozí kapitoly. Kdybychom v definici 4.8 uvažovali $n = 0$, dostali bychom tak ostré lokální extrémy z předchozí podkapitoly.

Naším cílem nyní bude určit nutné a postačující podmínky pro výskyt rozšířených lokálních extrémů. Vyslovíme a dokážeme věty analogické k větám 4.3, 4.4 a 4.5, pro rozšířené extrémy.

Věta 4.9 (Nutné a postačující podmínky první difference pro existenci rozšířeného extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí:*

- (i) *Posloupnost y_k má na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální minimum právě tehdy, když*

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} > 0. \quad (4.7)$$

- (ii) *Posloupnost y_k má na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální maximum právě tehdy, když*

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} < 0. \quad (4.8)$$

Důkaz. Dokážeme pouze bod (i). Bod (ii) lze dokázat analogickým postupem.

- (i) ($\Rightarrow$): Víme, že posloupnost y_k má na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální minimum a tedy z definice 4.8 musí platit

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = y_{K_0+2} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1}.$$

Když vyjádříme jednotlivé difference, tak dostaneme

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} > 0.$$

Tím dostáváme dokazovanou implikaci.

($\Leftarrow$): Víme, že pro posloupnost y_k platí

$$\Delta y_{K_0-1} < 0, \wedge \Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0 \wedge \Delta y_{K_0+n} > 0.$$

Po rozepsání jednotlivých diferencí obdržíme

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1},$$

což je přesně definice rozšířeného lokálního minima.

□

Obdobně jako v podkapitole 4.2, kde jsme se věnovali ostrým extrémům nyní prezentujeme podmínky na druhou diferenci a existenci rozšířených extrémů.

Věta 4.10 (Nutné a postačující podmínky druhé difference pro existenci rozšířeného extrému). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0 + n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

$$\Delta y_{K_0-1} \Delta y_{K_0+n} < 0, \quad (4.9)$$

$$\Delta^2 y_{K_0-1} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^2 y_{K_0-1} < 0 \quad (4.10)$$

$$\Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0. \quad (4.11)$$

Důkaz. Chceme dokázat ekvivalenci, důkaz tedy provedeme dvojitou implikací. Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že má posloupnost y_k rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Z definice 4.8 víme, že platí

$$y_{K_0-1} > y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} < y_{K_0+n+1},$$

resp.

$$y_{K_0-1} < y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} > y_{K_0+n+1}.$$

Z věty 4.9 platí, že posloupnost prvních diferencí musí v bodech K_0-1 a K_0+n měnit znaménko. Dále musí platit, že pro rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum, musí být posloupnost prvních diferencí záporná, resp. kladná v bodě K_0-1 a kladná, resp. záporná v bodě K_0+n . Odtud plynou podmínky (4.9) a (4.10).

Podmínka (4.11) také plyne přímo z definice, jelikož musí platit

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n},$$

a to jak pro rozšířené lokální minimum, tak i pro rozšířené lokální maximum. Tím je dokázána první implikace.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že jsou splněny podmínky (4.9), (4.10) a (4.11). Podmínka (4.11) nám zaručuje, že bude platit

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n}.$$

Dále podmínka (4.9) nám zaručuje, že posloupnost prvních diferencí v bodech K_0-1 a K_0+n bude střídat znaménka. Díky této vlastnosti víme, že se bude jednat o extrém.

Nerovnosti (4.10) určí, o který extrém se bude jednat. Pokud se bude jednat o rozšířené lokální minimum, pak bude posloupnost prvních diferencí v bodě K_0-1 záporná a v bodě K_0+n kladná, a naopak, jestliže se bude jednat o rozšířené lokální maximum. Alternativně můžeme rozepsat druhé difference a zjistíme, že za předpokladu, že bude splněna podmínka (4.10) obdržíme podmínky z věty 4.9. $\square$

Na závěr podkapitoly týkající se rozšířené extrémů ukážeme, jak lze využít posloupností vyšších diferencí při hledání rozšířené extrémů posloupností.

Ještě před samotným tvrzením dokážeme pomocné lemma.

Lemma 4.11. *Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ a necht pro nějaká $K_0 \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, platí*

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n} = c \iff \Delta y_{K_0} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\Delta^n y_{K_0} = 0, \quad (4.12)$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1)^{n+1} \Delta y_{K_0-1}, \quad (4.13)$$

$$\Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n}, \quad (4.14)$$

$$\Delta^{n+1}y_{K_0-1} = (-1)^n \Delta y_{K_0-1}, \quad (4.15)$$

$$\Delta^{n+1}y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n}. \quad (4.16)$$

Důkaz. Za využití binomické věty není obtížné dokázat, že platí následující rovnosti:

$$(i) \quad \Delta^n y_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{k+n-j},$$

$$(ii) \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

Důkaz rovnosti (4.12): V rovnosti (i) volme $k = K_0$, pak pro indexy $j = 0, 1, \dots, n$, platí $y_{K_0+n-j} = c$, tj. za využití rovnosti (ii) dostaneme

$$\Delta^n y_{K_0} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0+n-j} = c \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = c(1-1)^n = 0,$$

čímž jsme dokázali rovnost (4.12).

Důkaz rovnosti (4.13): Analogicky za využití rovnosti (i) a volbu $k = K_0 - 1$ dostaneme

$$\Delta^n y_{K_0-1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0-1+n-j}.$$

Jelikož pro indexy $j = 0, 1, \dots, n-1$ je $K_0-1+n-j \in \{K_0, K_0+1, \dots, K_0+n-1\}$, tedy $y_{K_0-1+n-j} = c$, pak platí

$$\Delta^n y_{K_0-1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0-1+n-j} = (-1)^n y_{K_0-1} + c \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j}.$$

Z rovnosti (ii) dostaneme

$$c \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} = -c(-1)^n \binom{n}{n} = c(-1)^{n+1}.$$

Celkově tedy platí

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1)^n y_{K_0-1} + c(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}(c - y_{K_0-1}) = (-1)^{n+1} \Delta y_{K_0-1},$$

čímž jsme dokázali rovnost (4.13).

Důkaz rovnosti (4.14): V rovnosti (i) volme $k = K_0 + 1$, pak dostaneme

$$\Delta^n y_{K_0+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} y_{K_0+1+n-j}.$$

Jelikož pro indexy $j = 1, \dots, n-1, n$ je $K_0+1+n-j \in \{K_0+1, K_0+2, \dots, K_0+n\}$, tedy $y_{K_0+1+n-j} = c$, pak platí

$$\Delta^n y_{K_0+1} = y_{K_0+n+1} + c \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j}.$$

Z rovnosti (ii) dostaneme

$$c \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} = -c \binom{n}{0} = -c.$$

Celkově tedy platí

$$\Delta^n y_{K_0+1} = y_{K_0+n+1} - c = (y_{K_0+n+1} - y_{K_0+n}) = \Delta y_{K_0+n},$$

čímž jsme dokázali rovnost (4.14).

Důkaz rovností (4.15) a (4.16): Z definice platí $\Delta^{n+1} y_i = \Delta^n y_{i+1} - \Delta^n y_i$. Dále za využití rovností (4.12), (4.13) a (4.14) můžeme psát:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = \Delta^n y_{K_0} - \Delta^n y_{K_0-1} = (-1)^n \Delta y_{K_0-1} \quad \text{pro } i = K_0 - 1.$$

$$\Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta^n y_{K_0+1} - \Delta^n y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} \quad \text{pro } i = K_0.$$

Tím jsme dokázali rovnosti (4.15) a (4.16). $\square$

Nyní již můžeme přímo vyslovit větu, která dává do souvislosti posloupnosti vyšších diferencí a rozšířené extrémy.

Věta 4.12 (Posloupnosti vyšších diferencí a rozšířené extrémy). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak má posloupnost y_k na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum právě tehdy, když:*

Pro n liché:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} > 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^{n+1} y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} < 0. \quad (4.17)$$

Pro n sudé:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} < 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^{n+1} y_{K_0-1} > 0 \wedge \Delta^{n+1} y_{K_0} < 0. \quad (4.18)$$

Navíc

- (i) *Pokud je n sudé, pak platí, že posloupnost $\Delta^n y_k$ má v K_0 ostrý extrém, kde $\Delta^n y_{K_0} = 0$, tj. $\Delta^n y_{K_0-1} > 0 < \Delta^n y_{K_0+1}$, resp. $\Delta^n y_{K_0-1} < 0 > \Delta^n y_{K_0+1}$.*
- (ii) *Pokud n liché, platí, že posloupnost $\Delta^n y_k$ v bodech K_0-1, K_0, K_0+1 splňuje nerovnosti*

$$\Delta^n y_{K_0-1} < 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^n y_{K_0-1} > 0,$$

$$\Delta^n y_{K_0} = 0,$$

$$\Delta^n y_{K_0+1} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta^n y_{K_0+1} < 0.$$

Důkaz. Nechť je y_k posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Provedeme důkaz dvojistou implikací.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že posloupnost y_k má rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$.

Víme, že platí

$$\Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \cdots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0,$$

což je ekvivalentní s

$$y_{K_0} = y_{K_0+1} = \cdots = y_{K_0+n-1} = y_{K_0+n} = c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Dále víme, že platí:

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 < \Delta y_{K_0+n} \quad \text{pro rozšíření lokálního minima,} \quad (4.19)$$

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 > \Delta y_{K_0+n} \quad \text{pro rozšíření lokálního maxima.} \quad (4.20)$$

Za využití lemmatu 4.11, resp. rovností (4.12)–(4.16) a nerovností (4.19), (4.20) dostaneme následující vlastnosti:

- V případě rozšířeného lokálního minima:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (-1)(\Delta y_{K_0-1}) > 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ liché,}$$

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (+1)(\Delta y_{K_0-1}) < 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé.}$$

- V případě rozšířeného lokálního maxima:

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (+1)(\Delta y_{K_0-1}) < 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ liché,}$$

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (-1)(\Delta y_{K_0-1}) > 0 \quad \wedge \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé.}$$

Tím jsme dokázali nerovnosti (4.17) a (4.18). Nyní ukážeme body (i) a (ii). Z lemmatu 4.11 přímo dostáváme:

- $\Delta^n y_{K_0} = 0$.

- V případě rozšířeného lokálního minima:

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) > 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé,}$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (+1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) < 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} > 0 \quad \text{pro } n \text{ liché.}$$

- V případě rozšířeného lokálního maxima:

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (-1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) < 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ sudé,}$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} = (+1) \cdot (\Delta y_{K_0-1}) > 0, \quad \Delta^n y_{K_0+1} = \Delta y_{K_0+n} < 0 \quad \text{pro } n \text{ liché.}$$

Odtud plyne:

- (i) Je-li n sudé, pak $\Delta^n y_{K_0} = 0$ a

$$\Delta^n y_{K_0-1} > 0 < \Delta^n y_{K_0+1} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního minima,}$$

$$\Delta^n y_{K_0-1} < 0 > \Delta^n y_{K_0+1} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního maxima,}$$

tedy $\Delta^n y_k$ má v bodě K_0 ostrý extrém.

- (ii) Je-li n liché, pak má uspořádané trojice $(\Delta^n y_{K_0-1}, \Delta^n y_{K_0}, \Delta^n y_{K_0+1})$ znaménka

$$(-, 0, +) \quad \text{v případě rozšířeného lokálního minima,}$$

$$(+, 0, -) \quad \text{v případě rozšířeného lokálního maxima.}$$

($\Leftarrow$): Necht' platí podmínky (4.17), (4.18), (i) a (ii) a zároveň

$$\Delta y_{K_0} = \Delta y_{K_0+1} = \dots = \Delta y_{K_0+n-1} = 0, \quad (4.21)$$

tj. ekvivalentně $y_{K_0} = \dots = y_{K_0+n} = c$. Potom lze použít lemma 4.11, ze kterého plyne

$$\Delta^{n+1} y_{K_0-1} = (-1)^n \Delta y_{K_0-1}, \quad \Delta^{n+1} y_{K_0} = \Delta y_{K_0+n}.$$

Znaménka $(n+1)$ -ní difference tedy určují znaménka příslušných prvních diferencí:

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 < \Delta y_{K_0+n} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního minima,}$$

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 > \Delta y_{K_0+n} \quad \text{v případě rozšířeného lokálního maxima.}$$

Společně s (4.21) jsou tak splněny podmínky věty 4.9, tj. (4.7), (4.8), a tedy posloupnost y_k má na $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$ rozšířené lokální minimum, resp. rozšířené lokální maximum. $\square$

Na obrázku 4 je znázorněn princip právě dokázané věty, pro $n = 2$ a $n = 3$ na rozšířeném lokálním maximu.

Analogicky jako v předchozí podkapitole, můžeme definovat rozšířený globální extrém posloupnosti.

Definice 4.13 (Rozšířený globální extrém). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak říkáme, že má posloupnost y_k *rozšířené globální minimum*, resp. *rozšířené globální maximum* na intervalu $[K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, jestliže platí

$$y_i \leq y_j, \quad \text{resp.} \quad y_i \geq y_j, \quad \forall i \in [K_0, K_0+n]_{\mathbb{Z}}, \quad \forall j \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}.$$

Při hledání rozšířených globálních extrémů, postupujeme analogicky jako u ostrých globálních extrémů.

4.4. Konvexní a konkávní posloupnosti

V této podkapitole se podíváme, jak je možné zavést (ryze) konvexní, resp. (ryze) konkávní posloupnost a odvodíme podmínky první a druhé difference pro ověření (ryzí) konvexnosti a konkávnosti posloupnosti.

Definice 4.14 ((Ryze) konvexní/konkávní posloupnost). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Tuto posloupnost nazýváme *konvexní* na intervalu $[A, B+1]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in [A, B+1]_{\mathbb{Z}}$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$y_{x_2} \leq y_{x_1} + \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \quad (4.22)$$

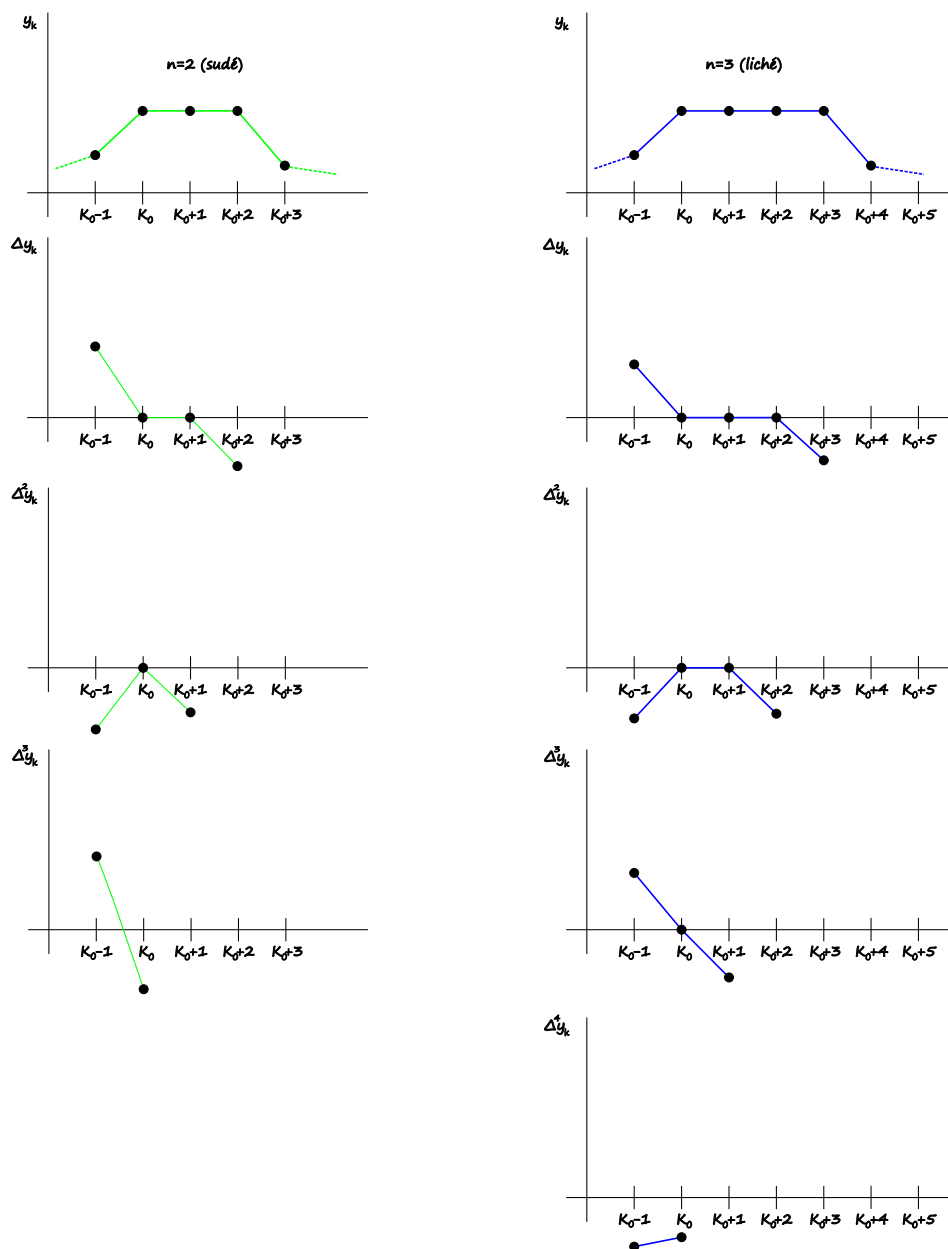
Obdobně posloupnost y_k nazýváme *konkávní* na intervalu $[A, B+1]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in [A, B+1]_{\mathbb{Z}}$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$y_{x_2} \geq y_{x_1} + \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \quad (4.23)$$

Jestliže v nerovnostech (4.22), resp. (4.23) nahradíme neostře nerovnosti ostrými nerovnostmi, dostaneme definici *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní* posloupnosti.

Vidíme, že definice konvexních a konkávních posloupností je diskrétní analogií konvexních a konkávních funkcí a tedy přímo z definice lze odvodit, že posloupnost, která je konvexní a konkávní zároveň je posloupnost aritmetická.

Poznámka 4.15. Kdybychom v definici 4.14 např. nerovnost (4.22) vynásobili -1 dostali bychom z konvexní posloupnosti posloupnost konkávní. Tedy, jestliže je nějaká posloupnost y_k na intervalu konvexní, pak je posloupnost $-y_k$ na tomto intervalu konkávní a naopak.



Obrázek 4. Differencování posloupností s rozšířeným lokálním maximem pro $n = 2$ a $n = 3$.

V následující větě ukážeme alternativní definici pro konvexní, resp. konkávní posloupnost.

Věta 4.16 (Alternativní definice konvexní/konkávní posloupnosti). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Dále nechť je tato posloupnost konvexní, resp. konkávní na $[A, B+1]_{\mathbb{Z}} \subseteq [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ a nechť $x_1, x_2, x_3 \in [A, B+1]_{\mathbb{Z}}$ jsou libovolné body, které splňují $x_1 < x_2 < x_3$. Pak platí vzájemně ekvivalentní nerovnosti (4.24)–(4.26), resp. (4.27)–(4.29).*

$$\text{Konvexní} \quad \frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}, \quad (4.24)$$

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}, \quad (4.25)$$

$$\frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}. \quad (4.26)$$

$$\text{Konkávní} \quad \frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \geq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}, \quad (4.27)$$

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \geq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}, \quad (4.28)$$

$$\frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \geq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}. \quad (4.29)$$

Jestliže jsou nerovnosti v (4.24)–(4.26), resp. (4.27)–(4.29) ostré, pak je posloupnost ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

Důkaz. Ukážeme zvlášť, že nerovnosti (4.24)–(4.29) jsou ekvivalentní s nerovnostmi (4.22)–(4.23) nehledě na to, zda jsou nerovnosti ostré nebo neostré. Jestliže ukážeme ekvivalenci pro neostré nerovnosti, pak z toho automaticky plyne, že jsou nerovnosti ekvivalentní i pro ostré nerovnosti. Z poznámky 4.15 víme, že stačí provést důkaz pouze pro konvexní posloupnosti.

Předpokládejme, že je posloupnost y_k konvexní. Pak musí nutně platit nerovnost (4.22). Jestliže z pravé strany nerovnosti (4.22) odečteme člen y_{x_1} a následně celou nerovnost vydělíme členem $(x_2 - x_1)$, tak dostaneme (4.24).

Z nerovnosti (4.24) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_1) &\leq (y_{x_3} - y_{x_1})(x_2 - x_1), \\ (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_1) &\leq (y_{x_3} - y_{x_2})(x_2 - x_1) + (y_{x_2} - y_{x_1})(x_2 - x_1), \\ (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_1 - x_2 + x_1) &\leq (y_{x_3} - y_{x_2})(x_2 - x_1), \\ (y_{x_2} - y_{x_1})(x_3 - x_2) &\leq (y_{x_3} - y_{x_2})(x_2 - x_1), \\ \frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} &\leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali implikaci (4.24) $\Rightarrow$ (4.25). Analogicky lze dokázat implikace (4.25) $\Rightarrow$ (4.26) a (4.26) $\Rightarrow$ (4.24). $\square$

Obdobně, jako v diferenciálním počtu, je možné odvodit podmínky na první a vyšší difference v souvislosti s konvexností, resp. konkávností posloupnosti. V následujících větách tyto podmínky vyslovíme a dokážeme.

Věta 4.17 (První diference a (ryzí) konvexnost/konkávnost). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak je posloupnost y_k (ryze) konvexní, resp. (ryze) konkávní právě tehdy, když posloupnost prvních diferencí Δy_k (ryze) rostoucí, resp. (ryze) klesající na intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že konvexní posloupnost můžeme změnou znaménka převést na konkávní posloupnost, stačí nám důkaz provést pouze pro konvexní posloupnosti.

($\Rightarrow$): Nechť je posloupnost y_k konvexní na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, tj. pro body $x_1, x_2, x_3 \in [a, b+1]_{\mathbb{Z}}$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}.$$

Ukážeme, že obecně platí $\Delta y_{x_1} \leq \Delta y_{x_3}$. Na bod x_2 se nekladou žádné požadavky kromě toho, že musí být splněny nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$. Proto můžeme volit $x_2 := x_1 + 1$ a dostaneme tak

$$\frac{y_{x_1+1} - y_{x_1}}{x_1 + 1 - x_1} = \frac{\Delta y_{x_1}}{1} = \Delta y_{x_1}.$$

Obdobně můžeme volit přeznačení $x_2 := x_3$ a zároveň $x_3 := x_3 + 1$ a dostaneme tak

$$\frac{y_{x_3+1} - y_{x_3}}{x_3 + 1 - x_3} = \frac{\Delta y_{x_3}}{1} = \Delta y_{x_3}.$$

Kombinací těchto dvou voleb dostaneme odhad

$$\Delta y_{x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1} \leq \Delta y_{x_3}.$$

Odtud platí

$$\Delta y_{x_1} \leq \Delta y_{x_3}.$$

Vzhledem k tomu, že body x_1, x_2 a x_3 volíme libovolně, tyto odhady platí na celém intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$. Posloupnost Δy_k , pak musí být (ryze) rostoucí na celém intervalu $[a, b]_{\mathbb{Z}}$.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že posloupnost prvních diferencí Δy_k je (ryze) rostoucí pro všechna $k \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$. Budeme vycházet z věty 4.16 a ukážeme, že pro libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí (4.24), tj.

$$\frac{y_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_1}}{x_3 - x_1}.$$

Mějme libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$, které splňují nerovnosti $x_1 < x_2 < x_3$. Pak platí

$$\Delta y_{x_1} \leq \Delta y_{x_2} \leq \Delta y_{x_3}.$$

Z věty 3.3 existují indexy $i \in (x_2, x_3]_{\mathbb{Z}}$ a $j \in (x_1, x_2]_{\mathbb{Z}}$, kde $j < i$ takové, že

$$\begin{aligned} \Delta y_{i-1} &\leq \frac{y_{x_3+1} - y_{x_2}}{x_3 + 1 - x_2} \leq \Delta y_i, \\ \Delta y_{j-1} &\leq \frac{y_{x_2+1} - y_{x_1}}{x_2 + 1 - x_1} \leq \Delta y_j. \end{aligned}$$

Navíc z monotonie musí platit

$$\Delta y_{j-1} \leq \Delta y_j \leq \Delta y_{i-1} \leq \Delta y_i.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{y_{x_2+1} - y_{x_1}}{x_2 + 1 - x_1} \leq \frac{y_{x_3+1} - y_{x_2}}{x_3 + 1 - x_2}.$$

Jelikož jsou body x_1, x_2 a x_3 voleny libovolně, plyne z poslední nerovnosti

$$\frac{x_{x_2} - y_{x_1}}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_{x_3} - y_{x_2}}{x_3 - x_2}.$$

Ryzí konvexnost dostaneme analogickým postupem. $\square$

Následující věta nám dává do souvislosti druhou diferenci posloupnosti a její konvexnost/konkávnost.

Věta 4.18 (Druhá diference a (ryzí) konvexnost/konkávnost). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak platí:*

- (i) *Posloupnost y_k je ryze konvexní, resp. ryze konkávní na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta^2 y_k > 0$, resp. $\Delta^2 y_k < 0$ na intervalu $[a, b-1]_{\mathbb{Z}}$.*
- (ii) *Posloupnost y_k je konvexní, resp. konkávní na intervalu $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$ právě tehdy, když $\Delta^2 y_k \geq 0$, resp. $\Delta^2 y_k \leq 0$ na intervalu $[a, b-1]_{\mathbb{Z}}$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro (ryze) konvexní posloupnosti.

($\Rightarrow$): Předpokládejme, že je posloupnost y_k (ryze) konvexní. Z věty 4.17 víme, že Δy_k bude (ryze) rostoucí na $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ a tedy z věty 4.1 dostaneme podmínku, že druhá diference musí být (ostře) větší než nula.

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí $\Delta^2 y_k \geq 0$, resp. $\Delta^2 y_k > 0$. Pak z věty 4.1 musí být posloupnost Δy_k rostoucí, resp. ryze rostoucí, a tedy z věty 4.17 dostaneme, že posloupnost y_k je konvexní, resp. ryze konvexní. $\square$

Při zkoumání konvexnosti, resp. konkávnosti posloupností hrají významnou roli tzv. inflexní body, které se nacházejí v místech, kde posloupnost přechází z ryze konvexní na ryze konkávní, resp. z ryze konkávní na ryze konvexní posloupnost.

Definice 4.19 (Inflexní bod). Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Říkáme, že bod $x_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ je *inflexním bodem*, jestliže existuje $A \in \mathbb{N}$, takové, že je posloupnost y_k na $[x_0, x_0 + A]_{\mathbb{Z}}$ ryze konvexní a na $[x_0 - A, x_0]_{\mathbb{Z}}$ ryze konkávní, nebo naopak.

V následující větě uvádíme podmínky první a druhé diference, pro existenci inflexních bodů.

Věta 4.20 (Nutné a postačující podmínky pro existenci inflexních bodů). *Nechť y_k je posloupnost definovaná na $[a, b+1]_{\mathbb{Z}}$. Pak $x_0 \in [a+1, b]_{\mathbb{Z}}$ je inflexním bodem právě tehdy, když existuje $A \in \mathbb{N}$ takové, že je splněna jedna z následujících ekvivalentních podmínek:*

- (i) *Posloupnost Δy_k je ryze rostoucí na $[x_0 - A, x_0 - 1]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň ryze klesající na $[x_0, x_0 + A - 1]_{\mathbb{Z}}$,
nebo*

- posloupnost Δy_k je ryze klesající na $[x_0 - A, x_0 - 1]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň ryze rostoucí na $[x_0, x_0 + A - 1]_{\mathbb{Z}}$.
- (ii) $\Delta^2 y_k < 0$ na $[x_0, x_0 + A - 2]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň $\Delta^2 y_k > 0$ na $[x_0 - A, x_0 - 2]_{\mathbb{Z}}$ nebo $\Delta^2 y_k > 0$ na $[x_0, x_0 + A - 2]_{\mathbb{Z}}$ a zároveň $\Delta^2 y_k < 0$ na $[x_0 - A, x_0 - 2]_{\mathbb{Z}}$.

Důkaz. Tvrzení věty plyne přímo z definice inflexních bodů 4.19 a vět 4.18 a 4.17. $\square$

4.5. Asymptoty posloupností

V předposlední podkapitole se zaměříme na teorii asymptot posloupností. Teorie přímo vychází z diferenciálního počtu a je tak její čistou analogií.

Definice 4.21 (Asymptota posloupnosti). Necht y_k je posloupnost definovaná na $[a, +\infty)_{\mathbb{Z}}$, resp. $(-\infty, b]_{\mathbb{Z}}$. Aritmetická posloupnost $x_k = Ak + B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptotou se směrnici* posloupnosti y_k , jestliže platí $\lim_{k \rightarrow +\infty} (y_k - (Ak + B)) = 0$, resp. $\lim_{k \rightarrow -\infty} (y_k - (Ak + B)) = 0$.

Věta 4.22 (O asymptotě se směrnici). *Posloupnost $x_k = Ak + B$ je asymptotou posloupnosti y_k definované na $[a, \infty)_{\mathbb{Z}}$ pro $k \rightarrow +\infty$, resp. $(-\infty, b]_{\mathbb{Z}}$ pro $k \rightarrow -\infty$ právě tehdy, když*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{k} = A, \quad a \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (y_k - Ak) = B,$$

resp.

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{y_k}{k} = A, \quad a \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} (y_k - Ak) = B.$$

Důkaz. Přímo z definice plyne, že posloupnost $x_k = Ak + B$ je asymptotou posloupnosti y_k právě tehdy, když platí $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} (y_k - Ak) = B$. Odtud dostáváme, že $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y_k}{k} - A \right) = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{B}{k} = 0$, a tedy nutně $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{y_k}{k} = A$. $\square$

Důsledkem této věty je následující tvrzení, které uvádíme bez důkazu.

Důsledek 4.23. *Konstantní posloupnost $x_k = B$ je asymptotou posloupnosti y_k pro $k \rightarrow \pm\infty$ právě tehdy, když $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} y_k = B$.*

4.6. Aplikace a příklady vyšetřování posloupností

V této podkapitole shrneme všechny výše dokázané věty a výsledky týkající se vyšetřování posloupností. Následně ilustrujeme vyšetřování posloupností na teoretických a aplikačních příkladech.

Při vyšetřování posloupností budeme postupovat podle návodu níže.

Poznámka 4.24 (Kvalitativní analýza posloupnosti). Necht je y_k posloupnost definovaná na $[a, b + 1]_{\mathbb{Z}}$.

- (i) Za využití věty 4.1 nalezneme **intervaly monotonie** posloupnosti.
- (ii) Pomocí vět 4.3, 4.4, 4.5, 4.9, 4.10 a 4.12 nalezneme **ostré** a **rozšířené lokální extrémy** a prověříme jejich okolí, zda se opravdu jedná ostré/rozšířené lokální extrémy.

- (iii) Ze znalosti ostrých/rozšířených lokálních extrémů z předchozího bodu, vyšetříme hodnoty posloupnosti v bodech a a $b+1$ (popřípadě pro $a, b+1 = \pm\infty$ vyšetříme hodnotu limit v $\pm\infty$) a porovnáme je s lokálními extrémy z předchozího bodu. Nalezneme tak **globální extrémy** (pokud existují).
- (iv) Pomocí vět 4.17 a 4.18 nalezneme **interval konvexnosti a konkávnosti**.
- (v) Za využití věty 4.20 (popřípadě 4.17 a 4.18) nalezneme **inflexní body**.
- (vi) Za předpokladu, že $a = -\infty$, resp. $b+1 = +\infty$, nalezneme pomocí vět 4.22 a 4.23, **asymptoty se směrnici**.
- (vii) Za pomoci informací z předchozích bodů, provedeme **přibližný náčrt průběhu grafu posloupnosti y_k** .

Pomocí poznámky 4.24 se nyní podíváme, na konkrétní příklady vyšetřování posloupností a jejího využití.

4.6.1. Vyšetřování posloupností. Ještě než si ukážeme nějaké přímé aplikace vyšetřování posloupností, demonstrováme užitečnost poznámky 4.24 na následujícím příkladu.

Příklad 4.25 (Analýza posloupnosti $y_k = k^2 2^k$). Mějme posloupnost

$$y_k = k^2 2^k,$$

která je definovaná na $\mathbb{Z}$. Vyšetřete průběh posloupnosti y_k na $\mathbb{Z}$.

Budeme postupovat přesně v krocích uvedených v poznámce 4.24.

- (i) **Monotonie:** Nalezneme posloupnost prvních diferencí

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = (k+1)^2 2^{k+1} - k^2 2^k = 2^k [2(k+1)^2 - k^2] = 2^k (k^2 + 4k + 2).$$

Protože $2^k > 0$ pro všechna k , o znaménku Δy_k rozhoduje člen

$$q(k) := k^2 + 4k + 2 = (k+2-\sqrt{2})(k+2+\sqrt{2}).$$

Jeho reálné kořeny jsou $-2 \pm \sqrt{2} \approx -3.414$ a -0.586 . Platí tedy

$$q(k) \begin{cases} > 0, & k \leq -4 \text{ nebo } k \geq 0, \\ < 0, & k \in \{-3, -2, -1\}. \end{cases}$$

Podle 4.1 platí, že je posloupnost y_k rostoucí na $(-\infty, -4]_{\mathbb{Z}} \cup [0, \infty)_{\mathbb{Z}}$ a klesající na $[-4, 0]_{\mathbb{Z}}$.

- (ii) **Rozšířené/ostře extrémy:**

- (a) **Lokální extrémy:** Podle věty 4.3 nastane lokální maximum v bodě K_0 , když

$$\Delta y_{K_0-1} > 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0} < 0,$$

analogicky lokální minimum je v bodě K_0 , když

$$\Delta y_{K_0-1} < 0 \quad \wedge \quad \Delta y_{K_0} > 0.$$

Vidíme, že změna znaménka posloupnosti Δy_k z $+$ na $-$ nastane mezi body $k = -4$ a $k = -3$, tedy

ostře lokální maximum je v $k = -3$ s hodnotou $y_{-3} = \frac{9}{8}$.

Přechod $- \rightarrow +$ je mezi $k = -1$ a $k = 0$, tedy

ostré lokální minimum v $k = 0$ s hodnotou $y_0 = 0$.

- (b) **Globální extrémy:** Podíváme se jakých hodnot nabývá posloupnost v krajních bodech definičního oboru, tj. zajímají nás limity v $\pm\infty$. Pro $k \rightarrow +\infty$ máme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 2^k = +\infty,$$

exponenciální růst převládá, takže globální maximum neexistuje (posloupnost je neomezená shora). Analogicky Pro $k \rightarrow -\infty$ máme

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} k^2 2^k = 0,$$

přitom $y_k \geq 0$ pro všechna k a $y_0 = 0$, tedy globální minimum je $y_0 = 0$.

- (iii) **Konvexnost/konkávnost:** Nalezneme posloupnost druhých diferencí posloupnosti y_k :

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(2^k(k^2 + 4k + 2)) = 2^k(k^2 + 8k + 12) = 2^k(k+2)(k+6).$$

Znaménko $\Delta^2 y_k$ opět určuje pouze výraz $(k+2)(k+6)$. Nulové body jsou $k = -6$ a $k = -2$. Posloupnost $\Delta^2 y_k$ je kladná mimo $\mathbb{Z} \setminus [-6, -2]_{\mathbb{Z}}$ a záporná na $[-5, -3]_{\mathbb{Z}}$, viz tabulka níže:

k	...	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	...
$(k+2)(k+6)$	...	+	0	-	-	-	0	+	...

Podle vět 4.17 a 4.18 tedy přímo platí

y_k je konvexní na $(-\infty, -6]_{\mathbb{Z}} \cup [-2, \infty)_{\mathbb{Z}}$, y_k je konkávní na $[-6, -2]_{\mathbb{Z}}$.

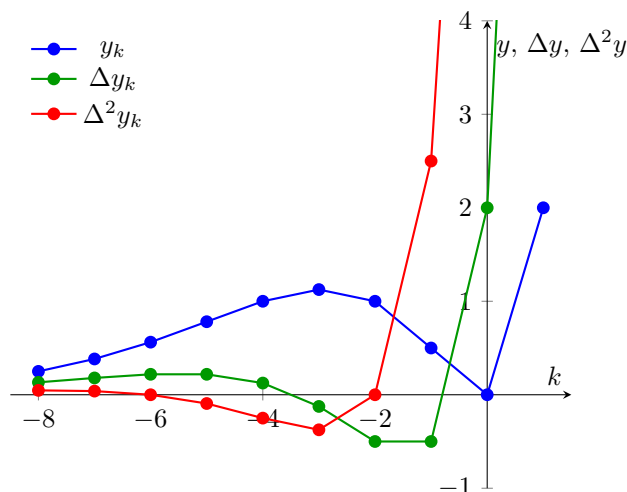
- (iv) **Inflexní body:** Inflexní body jsou právě ty body, kde se znaménko $\Delta^2 y_k$ mění, tj. inflexní body nastávají v

$$k = -6 \text{ a } k = -2.$$

- (v) **Asymptoty se směrnici:** Asymptota se směrnici $x_k = Ak + B$ existuje, jestliže $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} y_k/k = A$. Pro $k \rightarrow +\infty$ máme $y_k/k = k 2^k \rightarrow +\infty$ a tedy asymptota se směrnici v $+\infty$ neexistuje. Pro $k \rightarrow -\infty$ platí $y_k \rightarrow 0$ a $y_k/k \rightarrow 0$, takže asymptota se směrnici v $-\infty$ je

$$x_k = 0 \text{ pro } k \rightarrow -\infty.$$

- (vi) **Průběh posloupnosti:** Průběhy posloupností y_k (modrá barva), Δy_k (zelená barva) a $\Delta^2 y_k$ (červená barva) jsou znázorněny na obrázku níže.



4.6.2. Modus diskretních rozdělení pravděpodobnosti. V teorii pravděpodobnosti, konkrétně diskretních náhodných veličin vystupuje mnoho náhodných rozdělení, mezi nejznámější patří například *Poissonovo rozdělení* nebo *Binomické rozdělení*, resp. *Bernoulliho schéma*.

Jeden z mnoha důležitých parametrů, které nás mohou zajímat u těchto (a dalších) rozdělení je *modus*. Modus je nejpravděpodobnější hodnota náhodného rozdělení. Kdybychom vykreslili dané rozdělení do grafu s nějakými parametry, tak modus bude extrém (globální maximum) daného rozdělení.

Příklad 4.26 (Modus diskretního Poissonova rozdělení). Uvažujme diskretní Poissonovo rozdělení

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{kde } \lambda > 0.$$

Nalezněte modus Poissonova rozdělení pro obecné $\lambda > 0$.

Máme posloupnost

$$y_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{kde } \lambda > 0.$$

Definiční obor je $\mathbb{N}_0$. Za využití Stirlingovy formule dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0.$$

Posloupnost se s rostoucím k blíží k nule a navíc nabývá v $k = 0$ hodnoty $e^{-\lambda}$, což je nějaké „malé“ číslo. Obor hodnot je mezi 0 a naším hledaným extrémem.

Intervaly monotonie nalezneme pomocí věty 4.1. Určíme první diferenci posloupnosti y_k .

$$\Delta y_k = \Delta \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k+1)!} (\lambda - 1 - k).$$

Hledáme, kde tato posloupnost mění znaménko na diskretním intervalu $\mathbb{N}_0$.

Řešíme tedy rovnici

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k+1)!} (\lambda - 1 - k) = 0.$$

Řešením této rovnice je $k = \lambda - 1$ a podle věty 4.1 je posloupnost y_k rostoucí na $[0, \lambda - 1]_{\mathbb{Z}}$ a klesající na $[\lambda - 1, +\infty]_{\mathbb{Z}}$.

Vzhledem k tomu, že $\Delta y_{\lambda-1} = 0$, musí platit $y_{\lambda-1} = y_{\lambda}$. Odtud plyne, že na intervalu $[\lambda - 1, \lambda]_{\mathbb{Z}}$ se bude nacházet rozšířený lokální extrém. Nikde jinde posloupnost prvních diferencí znaménko nemění a ani není rovna nule. Jedná se tak o jediný extrém a dokonce se jedná o globální extrém, protože krajní body jsme již prověřili.

Když se podíváme na hodnoty, kterých posloupnost nabývá v bodech $\lambda - 2$ a $\lambda + 1$, zjistíme, že se jedná o rozšířené globální maximum.

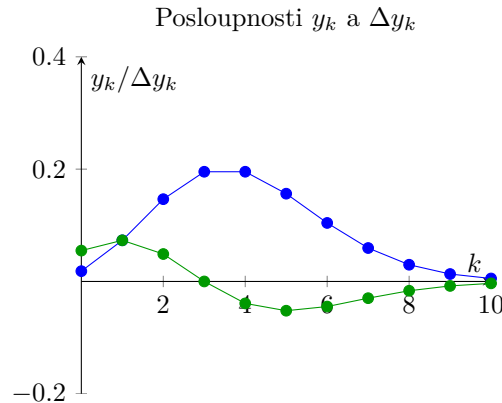
V praxi samozřejmě záleží na tom, zda je λ celé číslo nebo třeba číslo reálné, nicméně tento problém lze lehce vyřešit tak, že prověříme nejbližší body (nejbližší celá čísla) na množině $\mathbb{Z}$, stejně tak bychom měli porovnat body λ a $\lambda - 1$ mezi sebou.

Odborná literatura uvádí, že modus Poissonova rozdělení platí

$$\lambda - 1 \leq \text{modus} \leq \lambda.$$

Vidíme, že naše výsledky se s literaturou shodují.

Pro ilustraci uvádíme obrázek, který znázorňuje průběh posloupností y_k (modrá barva) a Δy_k (zelená barva), pro $\lambda = 4$. Na základě nalezeného globálního maxima by se měl modus diskretního Poissonova rozdělení nacházet na intervalu $[\lambda - 1, \lambda]_{\mathbb{Z}}$, tj. v bodech $k = 3$ a $k = 4$, což odpovídá obrázku níže.



Příklad 4.27 (Modus diskretního Binomického rozdělení). Uvažujme Binomické rozdělení s předpisem

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}, \quad p \in (0, 1).$$

Nalezněte modus Binomického rozdělení pro libovolné parametry p, n .

Uvažujme, že je posloupnost definovaná na $\mathbb{N}_0$, protože přesně takový interval nás v teorii pravděpodobnosti zajímá.

Máme posloupnost

$$y_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Definiční obor je $\mathbb{N}_0$. Posloupnost y_k v bodě $k = 0$ nabývá hodnoty $y_0 = (1-p)^n$, naopak pro rostoucí k platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0.$$

Tento výsledek plyne z úvahy, že pro n pevné a $k \rightarrow +\infty$ se binomické číslo blíží nule, jelikož $\binom{n}{k} = 0$ pro $k > n$. Takže od jistého indexu k takového, že $k > n$ bude y_k triviálně nula a tedy $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0$.

Nyní nalezneme posloupnost prvních diferencí Δy_k a podle věty 4.1 rozhodneme o monotonii y_k a nalezneme lokální extrémy.

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \Delta \left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Naším cílem je nalézt zobecněné nulové body této posloupnosti, resp. nalézt taková k ve kterých bude posloupnost Δy_k rovna nule, resp. bude měnit znaménko. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} p^k (1-p)^{n-k} = 0 \\ &= n!(n-k) p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} - n!(k+1) p^k (1-p)^{n-k} = 0 \\ &= (n-k)p - (k+1)(1-p) = 0 \\ &= p(n+1) - 1 = k. \end{aligned}$$

Posloupnost prvních diferencí má nulový bod v $k = p(n+1) - 1$, tím pádem musí platit, že $y_{p(n+1)-1} = y_{p(n+1)}$ a podle věty 4.1 je posloupnost y_k rostoucí na $[0, p(n+1) - 1]_{\mathbb{Z}}$ a klesající na $[p(n+1), +\infty)_{\mathbb{Z}}$. Není těžké ověřit, že v bodech $p(n+1) - 2$ a $p(n+1) + 1$ bude mít posloupnost y_k menší hodnoty než na $[p(n+1) - 1, p(n+1)]_{\mathbb{Z}}$.

Vidíme, že posloupnost y_k bude mít rozšířený lokální extrém na intervalu $[p(n+1) - 1, p(n+1)]_{\mathbb{Z}}$. Žádné další zobecněné nulové body posloupnosti Δy_k nemá a tedy se bude jednat dokonce o rozšířené globální maximum. Modus se bude nacházet na intervalu $[p(n+1) - 1, p(n+1)]_{\mathbb{Z}}$.

Literatura uvádí, že pro modus binomického rozdělení platí

$$p(n+1) - 1 \leq \text{modus} \leq p(n+1).$$

Vidíme, že naše výsledky se shodují s literaturou.

5. ZÁVĚR

V článku byla vybudována systematická teorie konečných diferencí a jejich využití při kvalitativní analýze posloupností ve smyslu diskrétní analogie k diferenciálnímu počtu. Byly odvozeny diskrétní verze základních vět o střední hodnotě a formulovány nutné a postačující podmínky pro existenci ostrých i rozšířených lokálních a globálních extrémů posloupností.

Zvláštní pozornost byla věnována prvním, druhým a vyšším diferencím, které se ukazují jako přirozený nástroj pro popis lokální charakteristiky posloupností a umožňují efektivní klasifikaci (rozšířených) lokálních extrémů, analogicky k derivacím ve spojitém diferenciálním počtu.

Prezentovaný aparát nachází přímé uplatnění při studiu posloupností, diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, diferenčních rovnic, diskrétních dynamických systémů a numerických diskretizačních metod. Možným směrem dalšího výzkumu je rozšíření výsledků na vícerozměrné posloupnosti, systémy diferenčních rovnic a diskrétní variační problémy. Dalším zajímavým otevřeným problémem jsou formulace a důkazy obecnějších diskretizací vět o střední hodnotě, jako například Cauchyova věta o střední hodnotě, Pompeiova věta o střední hodnotě, Flettova věta o střední hodnotě a další.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Janu Čermákovi CSc., doc. Ing. Ludkovi Nechvátalovi Ph.D. a doc. Ing. Jiřímu Šremrovi Ph.D. za pomoc, mnohé rady, které mi poskytli. Dále bych jim rád poděkoval za čas, který mi věnovali a za připomínky a odborné rady, které vedly ke zkvalitnění článku.

REFERENCE

- [1] R. P. Agarwal: *Difference Equations and Inequalities Theory, Methods, and Applications*, 2nd Edition, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [2] W. G. Kelly, A. C. Peterson: *Difference Equations, An introduction with Applications*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, CA, 2001.
- [3] E. Pelantová, J. Vondráčková: *Matematická analýza 1*, 3. Vydání, ČVUT, Praha, CA, 2018.

Jan Prokop, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně,
Technická 2, 61669 Brno, Česká republika,
e-mail: janprokop@post.cz

VYBRANÉ PŘÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ SÚŤAŽE MATHING

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

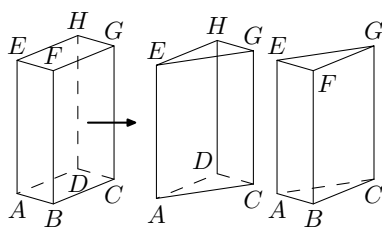
Ústav matematiky na FSI VUT v Brně každoročně organizuje matematickou súťaž MATHING pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku, s pôvodným názvom Internetová matematická olympiáda. V novembri v roku 2024 prebehol už jej sedemnásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach mathing.fme.vutbr.cz je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je siedmy v poradí na túto tému. Pozrieme sa v ňom bližšie na geometrickú úlohu o rovnobežnostech.

Príklad sa objavil v súťaži v roku 2023 pod číslom 7. Očakávali sme, že bude patriť k náročnejším, ale nenapadlo nás, že táto priestorová geometrická úloha sa zaradí medzi výrazne najnáročnejšie príklady za posledné roky, z pohľadu bodového ohodnotenia. Len dva tímy poslali správne riešenie aj s postupom.

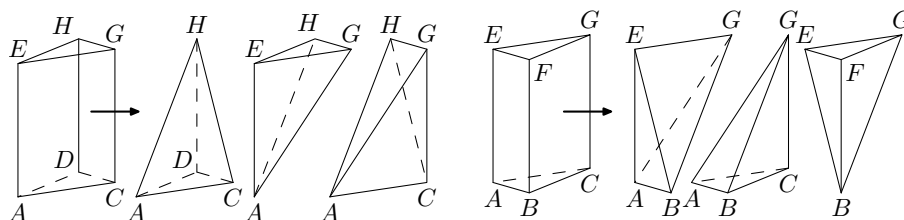
Tu je zadanie:

Príklad 1. Máme kvádr $ABCDEFGH$ s dĺžkami hran $|AB| = 1$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|AE| = 3$ cm. Tento kvádr rozdelíme rovinou určenou vrcholmi A, C, E, G najprve na dva hranoly $ACDEGH$ a $ABCEFG$, viz obrázek 1.



Obrázek 1. Obrázek k zadání příkladu 1, rozdělení na hranoly $ACDEGH$ a $ABCEFG$.

Každý z těchto hranolů dále rozdělíme na tři čtyřstěny. Z hranolu $ACDEGH$ vytvoříme trojici čtyřstěňů $ACDH$, $AEGH$, $ACGH$, z hranolu $ABCEFG$ obdobně vytvoříme trojici čtyřstěňů $ABEG$, $ABCG$, $BEFG$. Rozdělení hranolů je znázorněno na obrázku 2.



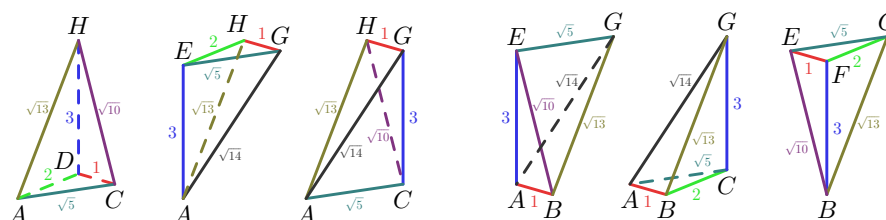
Obrázek 2. Obrázek k zadání příkladu 1, rozdělení hranolů na čtyřstěny.

Z těchto čtyřstěnů lze složit různé rovnoběžnostěny se stejným objemem, jako měl původní kvádr, pokud použijeme všech 6 čtyřstěnů.

Úkol: Nalezněte rovnoběžnostěn, složený ze všech 6 čtyřstěnů, s největším povrchem. Tento povrch určete.

Kompletné riešenie je možné nájsť na stránkach súťaže. Uvediem tu aspoň jeho náčrt:

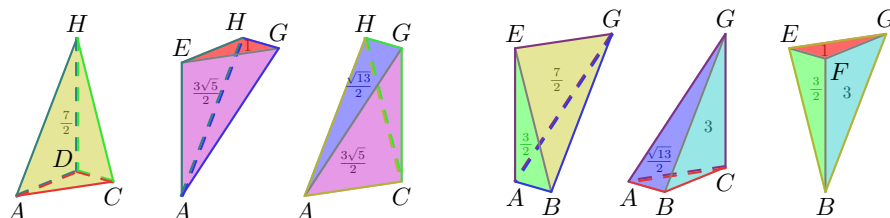
Keď bližšie preskúmame všetky hrany vzniknutých 6 štvorstenov, zistíme, že majú len 7 rôznych dĺžok. Označme ich pre prehľadnosť písmenami r, g, b, c, m, y, k (podľa obvyklého označenia farieb, ktoré majú tieto hrany na obrázku 3). Sú to dĺžky hrán pôvodného kvádra: $r = 1$ cm, $g = 2$ cm, $b = 3$ cm, uhlopriečok jeho stien: $c = \sqrt{5}$ cm, $m = \sqrt{10}$ cm, $y = \sqrt{13}$ cm a jeho telesovej uhlopriečky: $k = \sqrt{14}$ cm.



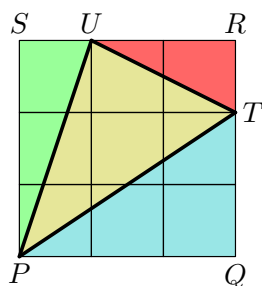
Obrázek 3. Dĺžky hrán štvorstenov. Hrany rovnakej dĺžky sú vyznačené rovnakou farbou.

Teraz sa pozrime na steny vzniknutých štvorstenov. Vidíme, že sa medzi nimi objavuje len 6 rôznych trojuholníkov a k nim zrkadlovo prevrátené. Všetky tieto trojuholníky, okrem jedného, sú pravouhlé, a je jednoduché určiť ich obsahy. Sú vyznačené na obrázku 4.

U nepravouhlého trojuholníka, (na obr. 4 je to trojuholník BEG a ACH vyznačený žltou farbou), tiež nie je zložité určenie jeho obsahu: jeho strany sú prepo-nami pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami 1 cm a 2 cm, 1 cm a 3 cm, 2 cm a 3 cm, a môžeme si pomôcť napríklad obrázkom 5.



Obrázek 4. Obsahy stien štvorstenov. Steny s rovnakým obsahom sú vyznačené rovnakou farbou. Farby čiar znázorňujú farbu zakrytých stien.



Obrázek 5. Pomocný štvorec $PQRS$ má dĺžku strany 3 cm a má obsah 9 cm^2 , $\triangle PQT$ má obsah 3 cm^2 , $\triangle TRU$ má obsah 1 cm^2 , $\triangle PUS$ má obsah $\frac{3}{2} \text{ cm}^2$. Z toho plynie, že obsah $\triangle PTU$ je $9 - 3 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \text{ cm}^2$.

Označme obsahy týchto 6 typov trojuholníkov, zoradené od najmenšieho po najväčší, veľkými písmenami R, G, B, C, M, Y . Sú to

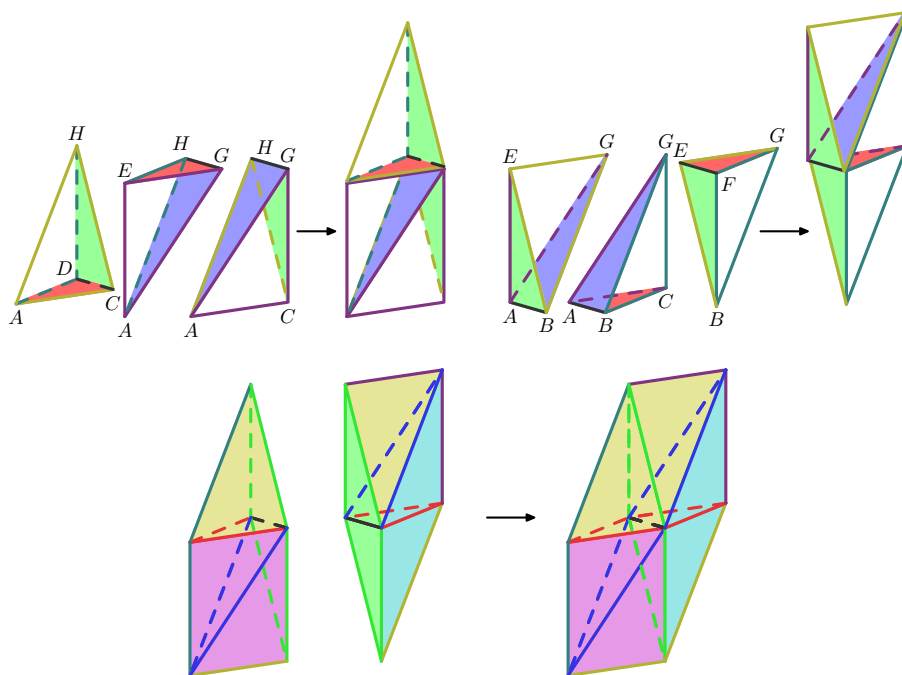
$$R = 1 \text{ cm}^2, G = 1,5 \text{ cm}^2, B = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8 \text{ cm}^2,$$

$$C = 3 \text{ cm}^2, M = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3,4 \text{ cm}^2, Y = 3,5 \text{ cm}^2.$$

Teraz využijeme skutočnosť, že každý z možných rovnobežnostenov, ktorý dostaneme poskladaním z týchto 6 štvorstenov, bude mať, rovnako ako pôvodný kváder, 3 páry rovnobežníkových stien. Každá stena bude tvorená dvojicou zhodných trojuholníkov - stien niektorých zo štvorstenov, a k nej protiľahlá stena bude tvorená dvojicou rovnakých trojuholníkov (zrkadlovo prevrátených). Na steny sa teda využijú len 3 rôzne typy trojuholníkov z celkových 6. Ak chceme dosiahnuť maximálny povrch, vezmeme tie tri trojuholníky, ktoré majú najväčší obsah, teda tie s obsahmi C, M, Y . Povrch rovnobežnostena je štvornásobok súčtu ich obsahov, to je

$$4(C + M + Y) = 4 \left(3 + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{7}{2} \right) = 26 + 6\sqrt{5} \text{ cm}^2 \approx 39 \text{ cm}^2.$$

Teraz už len stačí takýto rovnobežnosten poskladať. Toto vyžaduje trochu priestorovej predstavivosti, je tiež možné si vyrobiť model. Postupujeme tak, že prikľadáme k sebe tie steny, ktoré majú najmenší obsah, teda tie s obsahmi $2R$, $2G$, $2B$. Postup skladania je znázornený na obrázku 6.



Obrázek 6. Postup skladania rovnobežnostena s najväčším povrchom. Steny s rovnakým obsahom sú vyznačené rovnakou farbou. Farby čiar znázorňujú farbu nevyplnených stien.



Na motívy tohto príkladu sme na našom Ústave matematiky vyrobili pomocou 3D tlače aj skladačku, ktorú dostalo desať najlepšie umiestnených tímov spolu s diplomom. Ku skladačke bol priložený leták s mierne pozmenenou úlohou. Okrem nájdenia rovnobežnostena s najväčším povrchom chceme nájsť aj všetky ostatné rovnobežnosteny, ktoré je možné poskladať daným spôsobom.

Príklad 2. Zistite, koľko rôznych rovnobežnostenov je možné poskladať zo štvorstenov $ACDH$, $AEGH$, $ACGH$, $ABEG$, $ABCG$, $BEFG$ (znázornených na obrázku 2), a ktorý z nich má najväčší povrch.

Riešenie nebolo priložené, uvediem ho teraz na tomto mieste.

Riešenie príkladu 2. Vieme už, že skladačku tvorí 6 štvorstenov, ktorých trojuholníkové steny majú spolu 6 rôznych obsahov, označili sme ich R, G, B, C, M, Y . Z toho vždy 3 sa použijú na steny vytvoreného rovnobežnostena. Maximálny možný počet možností je teda kombinačné číslo $\binom{6}{3} = 20$. Ak by sme sa však všetkých 20 pokúsili poskladať, v niektorých prípadoch by sa nám to nepodarilo.

Prečo? Pozrime sa teraz na to, kde sa v našom telese nachádzajú hrany tých 6 štvorstenov. Tieto hrany majú 7 rôznych dĺžok. Niektoré z nich sú súčasne hranami rovnobežnostena. Tie majú 3 rôzne dĺžky. Ďalšie sú uhlopriečkami jeho stien, to sú ďalšie 3 rôzne dĺžky. A niektoré sú vždy jeho telesovou uhlopriečkou. Tie majú poslednú, siedmu dĺžku. A tie nie sú obsiahnuté v žiadnom z troch typov trojuholníkov, tvoriacich steny.

Vypíšme si prehľad, ktorý trojuholník má ktoré hrany:

$R : r, g, c \quad G : r, b, m \quad B : r, y, k \quad C : g, b, y \quad M : b, c, k \quad Y : c, m, y$.

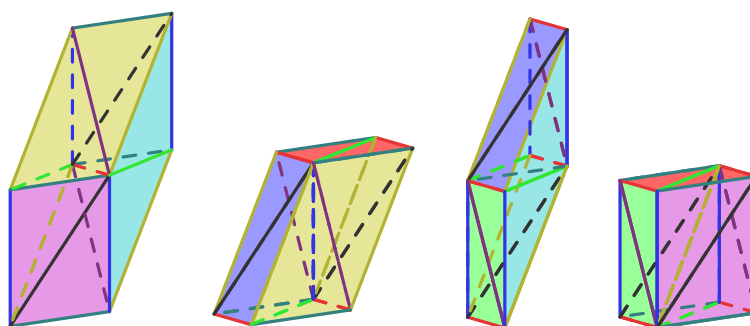
A teraz ku každej hrane napíšeme tie trojuholníky, ktoré ju neobsahujú, a teda ktoré jediné by mohli tvoriť steny rovnobežnostena, ak by takáto hrana bola jeho telesovou uhlopriečkou:

$r : C, M, Y \quad b : R, B, Y \quad c : G, B, C \quad y : R, G, M$

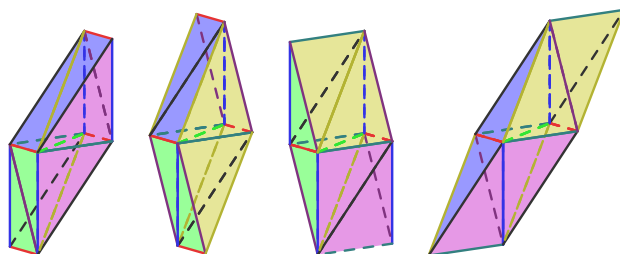
$g : G, B, M, Y \quad m : R, B, C, M \quad k : R, G, C, Y$.

V prvom riadku sú tie hrany, ku ktorým existujú len 3 vhodné trojuholníky, a teda môže vzniknúť maximálne jeden rovnobežnosten s takouto telesovou uhlopriečkou. V druhom riadku sú tie, ku ktorým existujú 4 vhodné trojuholníky, a teda môžu vzniknúť maximálne 4 rovnobežnosteny s takouto telesovou uhlopriečkou. Spolu je teda maximálne $4 + 3 \cdot 4 = 16$ možných rovnobežnostenov.

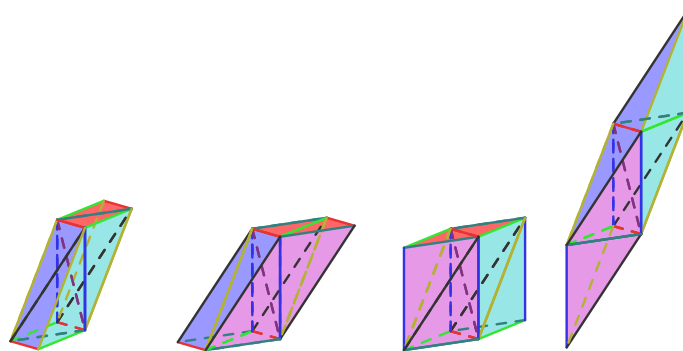
Všetky tieto rovnobežnosteny sa už skutočne dajú vytvoriť, čo je ľahké overiť ich skonštruovaním. Sú znázornené na obrázkoch 7–10, steny s rovnakým obsahom sú vyznačené rovnakou farbou a farby čiar znázorňujú dĺžku hrán.



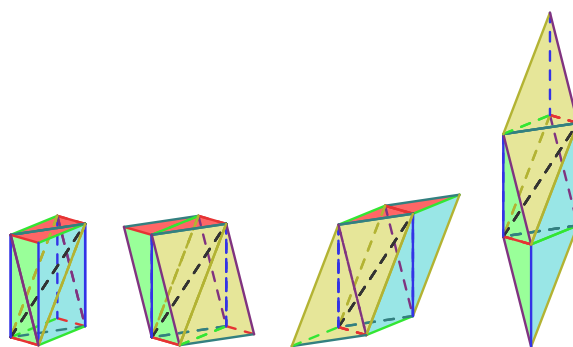
Obrázek 7. Rovnobežnosteny $rCMY, bRBY, cGBC, yRGM$.



Obrázek 8. Rovnobežnosteny $gGBM$, $gGBY$, $gGMY$, $gBMY$.



Obrázek 9. Rovnobežnosteny $mRBC$, $mRBM$, $mRCM$, $mBCM$.



Obrázek 10. Rovnobežnosteny $kRGC$, $kRGY$, $kRCY$, $kGCY$.

Viera Štoudková Růžicková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení
technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz