# O DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH SE ZPOŽDĚNÍM – APLIKACE V ROBOTICE

PETR TOMÁŠEK

ABSTRAKT. V tomto článku jsou prezentovány některé zajímavé kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem. Naším cílem je demonstrovat skutečnost, že tyto vlastnosti se mohou dramaticky lišit v případě diferenciální rovnice se zpožděním a v jistém smyslu „odpovídající" klasické obyčejné diferenciální rovnice. Využití diferenciálních rovnic se zpožděním je ilustrováno aplikací z oblasti robotiky.

## 1. ÚVOD

Modelování řady problémů v technické praxi i v jiných odvětvích často vede na řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (ODE), který lze zapsat jako

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,, \tag{1.1}$$

kde $x \in C(\langle t_0, t_f\rangle, \mathbb{R}^n)$ a $f \in C(\langle t_0, t_f\rangle \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Často je nezbytné zahrnout do systému diferenciálních rovnic také členy, které obsahují hodnotu neznámé funkce v čase minulém, což vede na systém diferenciálních rovnic se zpožděním (DDE)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0, \tag{1.2}$$

kde $y \in C(\langle t_0-\gamma, t_f\rangle, \mathbb{R}^n)$, $\gamma = \max\{\tau(t), t_0 \leq t \leq t_f\}$, $f \in C(\langle t_0, t_f\rangle \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\tau \in C(\langle t_0, t_f\rangle, \mathbb{R}_0^+)$. Výraz $\tau(t)$ nazýváme *zpožděním* a člen $t-\tau(t)$ *zpožděným argumentem*. Podle tvaru $\tau(t)$ pak rozlišujeme např. zpoždění ohraničené či neohraničené. Více k úvodu do dané problematiky lze nalézt např. v [1, 5, 6].

## 2. SPECIFIKA ZPOŽDĚNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

**Definice 2.1** (Počáteční problém)**.** Uvažujme funkci $\phi \in C(\langle t_0-\gamma, t_0\rangle, \mathbb{R}^n)$. Úlohu určit takové řešení rovnice (1.2), které vyhovuje podmínce

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in \langle t_0-\gamma, t_0\rangle, \tag{2.1}$$

nazveme **počátečním problémem**.

---

2020 *MSC.* Primární 34K06, 34K25.

*Klíčová slova.* diferenciální rovnice se zpožděním, asymptotické vlastnosti, oscilatorické vlastnosti.

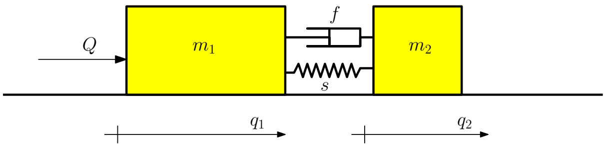
Práce byla podporována projektem A-Math-Net - Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

### 2.1. Subsekce

Povšimněme si, že počáteční podmínka v případě ODE (1.1) $x(t_0) = x_0$ je dimenze jedna, zatímco ...

**Příklad 2.2.** *Uvažujme diferenciální rovnici s konstantním zpožděním ...*

*Na obrázku 1 je ...*




**Obrázek 1.** Řešení počátečního problému..

## 3. Závěr

V článku byla na lineárních diferenciálních rovnicích prvního řádu s konstantním a proporcionálním zpožděním ilustrována některá jejich specifika, především pak v souvislosti s „opovídajícím" případem obyčejné diferenciální rovnice. Použití zpožděných rovnic bylo ilustrováno na jednoduchém modelu z oblasti robotiky.

## Reference

[1] C.T.H. Baker: *Retarded differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **125** (2000), 309–335.
[2] J. Čermák: *On the differential and difference equation with a power delayed argument*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **5** (2008), 1–8.
[3] L. H. Erbe, Q. Kong, B.G. Zhang: *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1995.
[4] T. Erneux: *Applied Delay Differential Equations*, Springer, 2009.
[5] V. Kolmanovskii, A. Myshkis: *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.
[6] P. Marušiak, R. Olach: *Funkcionálne diferenciálne rovnice*, Žilinská univerzita, 2000.
[7] H. Smith: *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer, 2011.
[8] G. Stépán: *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*, Longman Scientific & Technical, Burnt Mill, 1989.

Petr Tomášek, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
*e-mail*: `tomasek@fme.vutbr.cz`